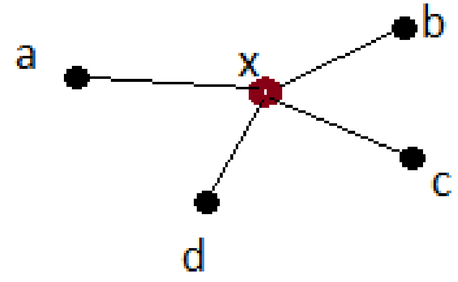
Системы поддержки принятия решений

9. Экспертные методы

Метод минимального расстояния

Предположим, что для каждой из N альтернатив выделена числовая ось гиперпространства. Тогда ранжировка альтернатив в этом гиперпространстве может быть представлена некоторой точкой. Координаты этой точки, изображающей систему предпочтений эксперта, определяется рангами, отложенными по соответствующим числовым осям. Система предпочтений каждого эксперта для данной совокупности альтернатив будет изображаться точкой в таком гиперпространстве. Разумно предположить, что в качестве суммарной оценки может быть выбрана такая оценка, изображающая точка которой находится ближе всего ко всем точкам гиперпространства, изображающим предпочтения всех экспертов. Таким образом, если ввести понятие расстояния между экспертными оценками, то в качестве суммарной оценки можно определить такую, сумма расстояний до которой от оценок всех экспертов будет минимальной.



Описание метода

Таким образом, в качестве суммарной оценки может быть определена такая, сумма расстояний до которой от оценок всех экспертов будет минимальной:

$$A_0 \in Arg \min \left\{ \sum_{\kappa=1}^{N} \Delta\left(A, A^{\kappa}\right) \right\}; \qquad (1)$$

где A_0 – искомая оценка – ранжировка, выступающая в качестве аргумента, минимизирующего сумму расстояний Δ;

Δ – расстояние между ранжировками;

A^K – ранжировка *к*-го эксперта;

Ω – множество всех возможных нестрогих ранжировок, задаваемых матрицами $A=(a_{ij})$, в которых $a_{ij}=1$ только тогда, когда $\omega_i>\omega_j$; $a_{ij}=-1$, когда $\omega_i<\omega_j$; $a_{ij}=0$, когда $\omega_i\approx\omega_j$, $\forall i,j=1,\ldots N$.

Описание метода

Расстояние между ранжировками наиболее часто определяется следующим способом.

Если и две ранжировки, то
$$\Delta(A,B)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|. \qquad (2)$$

Такое понятие расстояния между ранжировками удовлетворяет следующим условиям:

1) в случае, если ранжировки совпадают ($A=B$, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$), то $\Delta(A,B)=0$;

2) расстояние между двумя ранжировками всегда неотрицательно $\Delta(A,B)>0$;

3) расстояние не зависит от направления измерения $\Delta(A,B)=\Delta(B,A)$;

4) минимальное положительное расстояние между двумя ранжировками равно единице (для выполнения этого условия в понятие расстояния введён нормирующий множитель 1/2);

5) расстояние Δ не зависит от того, как пронумерованы альтернативы, т.е. расстояние Δ инвариантно относительно одинаковых перестановок альтернатив внутри ранжировок;

6) для расстояния реализуется «правило треугольника» $\Delta(A,B)+\Delta(B,C)\geq\Delta(A,C)$, причем равенство справедливо только тогда, когда ранжировка C находится между B и A, т.е. когда $a_{ij}\leq c_{ij}\leq b_{ij}$ или $a_{ij}\geq c_{ij}\geq b_{ij}$ для всех i и j.

Пример

Пример использования метода минимального расстояния.

Варианты ранжировок экспертов:

A = { 1, 4, 3, 2 }

B = { 1, 2, 4, 3 }

C = { 4, 1, 2, 3 }

D = { 4, 2, 1, 3 }

Расстояние вычисляется следующим образом:

$$L = Ki / Kn,$$

где Ki – количество инверсий относительно эталонного списка;

Kn – максимально возможное количество инверсий для списка длиной n:

$$Kn = n*(n-1)/2$$

Результаты расчетов

Все ранжировки				A	B	C	D	SUM
1	2	3	4	0,500000	0,166667	0,500000	0,666667	1,833334
1	2	4	3	0,333333	0,000000	0,333333	0,500000	1,166666
1	**4**	**2**	**3**	**0,166667**	**0,166667**	**0,166667**	**0,333333**	**0,833334**
1	3	2	4	0,333333	0,333333	0,666667	0,833333	2,166666
1	3	4	2	0,166667	0,500000	0,500000	0,666667	1,833334
1	4	3	2	0,000000	0,333333	0,333333	0,500000	1,166666
2	1	3	4	0,666667	0,333333	0,666667	0,500000	2,166667
2	1	4	3	0,500000	0,166667	0,500000	0,333333	1,500000
2	3	1	4	0,833333	0,500000	0,833333	0,666667	2,833333
2	4	1	3	0,666667	0,333333	0,333333	0,166667	1,500000
2	3	4	1	1,000000	0,666667	0,666667	0,500000	2,833334
2	4	3	1	0,833333	0,500000	0,500000	0,333333	2,166666
3	1	2	4	0,500000	0,500000	0,833333	1,000000	2,833333

Результаты расчетов (окончание)

Все ранжировки				A	B	C	D	SUM
3	1	4	2	0,333333	0,666667	0,666667	0,833333	2,500000
3	2	1	4	0,666667	0,666667	1,000000	0,833333	3,166667
3	4	1	2	0,500000	0,833333	0,500000	0,666667	2,500000
3	2	4	1	0,833333	0,833333	0,833333	0,666667	3,166666
3	4	2	1	0,666667	1,000000	0,666667	0,500000	2,833334
4	**1**	**2**	**3**	**0,333333**	**0,333333**	**0,000000**	**0,166667**	**0,833333**
4	1	3	2	0,166667	0,500000	0,166667	0,333333	1,166667
4	2	1	3	0,500000	0,500000	0,166667	0,000000	1,166667
4	3	1	2	0,333333	0,666667	0,333333	0,500000	1,833333
4	2	3	1	0,666667	0,666667	0,333333	0,166667	1,833334
4	3	2	1	0,500000	0,833333	0,500000	0,333333	2,166666

Метод ранжирования

Цель этого метода – получить (нестрогую) ранжировку альтернатив по результатам однократного опроса экспертов.

Каждый эксперт даёт свою ранжировку альтернатив, может быть, нестрогую. Для эквивалентных альтернатив ранг устанавливается как среднее арифметическое (например, 5 и 6 → 5.5 у каждой).

Результирующий ранг определяется суммой рангов:

$$\overline{R_j} = \sum_{i=1}^{N} R_{ij} \qquad (1)$$

где Rij – ранг, присвоенный i-м экспертом j-й альтернативе.

Методы непосредственной ранжировки сложны для эксперта (операция 032), поэтому лучше использовать методы попарного сравнения. По результатам попарного сравнения для каждого эксперта строится матрица $A=\|a_{ij}\|$, $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $a_{ij} + a_{ji} = 0$, $a_{ii} = 0$, $i=1,\ldots,N$.

Метод ранжирования

Значение a_{ij} определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1,\ если\ w_i > w_j \\ 0,\ если\ w_i \approx w_j \\ -1,\ если\ w_i < w_j \end{cases}$$

где w_i, w_j – сравниваемые альтернативы.

Общая матрица вычисляется суммированием элементов матриц всех экспертов:

$$\mathbf{A}= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \sum_{x=1}^{N} a_{11}^{x} & \sum_{x=1}^{N} a_{12}^{x} & \ldots & \sum_{x=1}^{N} a_{1n}^{x} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \sum_{x=1}^{N} a_{n1}^{x} & \sum_{x=1}^{N} a_{n2}^{x} & \ldots & \sum_{x=1}^{N} a_{nn}^{x} \\ \hline \end{array}$$

При этом диагональные элементы равны 0. Если обозначить матрицу как $A=\|A_{ij}\|$, то ранг j-й альтернативы определяется как сумма элементов по столбцу:

$$B_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}$$

Метод шкалирования

Метод ставит в соответствие альтернативам (критериям) числа, определяющие "веса" этих альтернатив (критериев).

Исходными данными являются множество альтернатив (критериев) и матрица их строгой ранжировки: $A = \|r_{ij}\|$, где r_{ij} – ранг j-й альтернативы (критерия) с точки зрения i-го эксперта (чем меньше значение, тем выше ранг).

Суммарный ранг каждой альтернативы (критерия) – сумма значений по столбцу.

<u>Постановка задачи:</u>

Дано: N критериев или N альтернатив; строгие ранжировки критериев (альтернатив), полученные от M экспертов.

Требуется: определить веса критериев (или ранги альтернатив).

Описание метода

На основании матрицы A строим квадратную матрицу $A^* = \|a_{ij}\|$, каждый элемент которой определяется как число случаев, когда i-й критерий более важен, чем j-й (или i-я альтернатива предпочтительнее, чем j-я).
Нормируем элементы матрицы A* (делим на число экспертов) и получаем матрицу $\boldsymbol{P} = \|p_{ij}\|$:

$$P = (p_{ij}) = \frac{A^*}{N} = \left(\frac{a_{ij}}{N}\right) \qquad (1)$$

где $p_{ij} \in [0,1]$, p_{ij} можно интерпретировать как вероятность предпочтения i-й альтернативы (критерия) j-й.
Предположим, что эта вероятность подчиняется нормальному закону распределения. Говорят, что случайная величина ξ *нормально распределена* или подчиняется *закону распределения Гаусса*, если её плотность распределения $\boldsymbol{\varphi(x)}$ имеет вид:

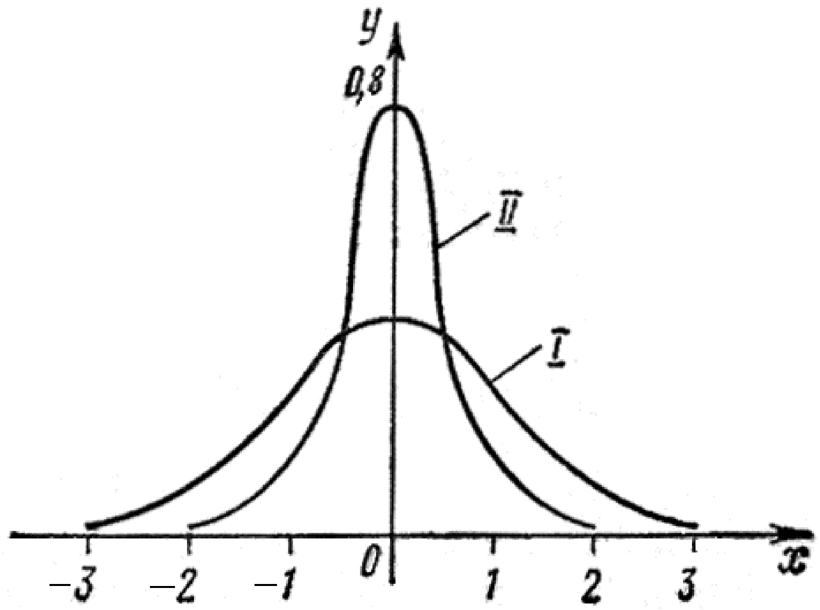
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\alpha)^2/(2\sigma^2)} \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – любое действительное число, а $\boldsymbol{\sigma}>0$.

Описание метода (продолжение)

График функции $\varphi(x)$ симметричен относительно прямой $x=\alpha$. На рисунке справа изображены два графика функции $y=\varphi(x)$: график I соответствует значениям $\alpha=0$, $\sigma=1$, а график II – значениям $\alpha=0$, $\sigma=1/2$.

При $\alpha = 0$ и $\sigma = 1$ имеем стандартное нормальное распределение. Для нашего случая целесообразно взять за основу именно стандартное распределение, т.к. для элементов матрицы A* справедливо равенство $a_{ij}+a_{ji}=1$, при этом $a_{ij}=a_{ji}$ означает, что между этими альтернативами (критериями) нет предпочтения, т.е. их выбор равновероятен.



Описание метода (продолжение)

Исходя из связи между плотностью распределения ***φ(x)*** и функцией распределения *F(x)*, для стандартного нормального распределения имеем:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (3)$$

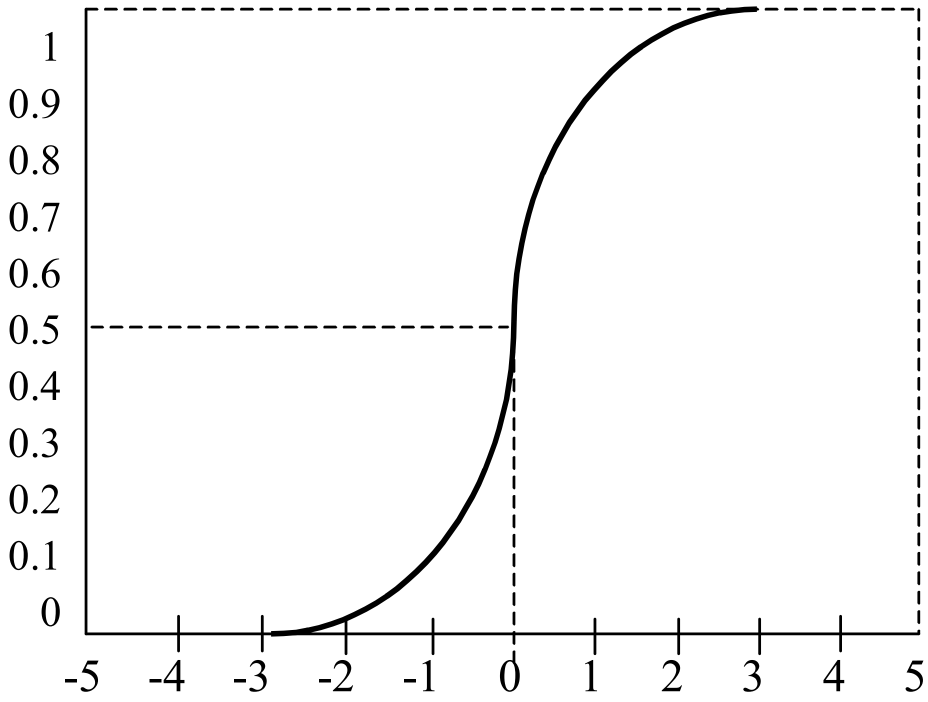


График функции F(x) для стандартного нормального распределения.

Описание метода (продолжение)

Значения вероятностей x_{ij} определяется формулой (3); эти значения можно взять из таблиц математической статистики (некоторые значения приведены на следующем слайде). Тогда можно воспользоваться таблицами нормального распределения и построить матрицу X = || x_{ij} ||, где x_{ij} – значение функции распределения вероятности из таблицы нормального распределения. Диагональ матрицы A* переносится в матрицу *X* без изменений.

Далее строится вектор, элементы которого являются нормированной суммой матрицы X по строкам:

$$\overline{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij}}{N} \qquad (4)$$

Для того чтобы перейти от функции распределения к плотности распределения, по значениям элементов данного вектора в таблицах математической статистики находят соответствующее значение вероятности и получают вектор вероятностей. Полученные значения вектора затем нормируют так, чтобы сумма его элементов была равна 1:

$$p_i^* = \frac{\overline{p_i}}{\sum_{j=1}^{N} p_j} \qquad (5)$$

где $\overline{p_i}$ – i-й элемент вектора вероятностей .

Эти значения и являются весами альтернатив (критериев).

Некоторые значения функции стандартного нормального распределения

t	**.00**	.01	**.02**	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	**.5000**	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	**.6985**	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621

Пример: определение весов критериев

Пусть группа экспертов (10 человек) осуществляет оценку относительной важности параметров противотанкового ракетного комплекса, а именно:

1) дальность действия;
2) среднюю скорость полёта по траектории;
3) толщину пробиваемой брони;
4) время предстартовой подготовки.

Эксперты проводят строгую ранжировку параметров, результаты которой приведены в таблице 1.

Таблица 1.

A =

1	3	2	4
2	3	1	4
1	2	3	4
2	4	1	3
2	1	3	4
4	1	3	2
4	3	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
2	3	1	4

Продолжение примера

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.7 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0.00 & 0.52 & 0.52 \\ 0.00 & 0 & 0.52 & 0.84 \\ -0.52 & -0.52 & 0 & 0.25 \\ -0.52 & 0.84 & -0.25 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} 0.260 \\ 0.340 \\ -0.198 \\ -0.402 \end{bmatrix} \quad \overline{P} = \begin{bmatrix} 0.603 \\ 0.633 \\ 0.420 \\ 0.345 \end{bmatrix} \quad \overline{P}_* = \begin{bmatrix} 0.3015 \\ 0.3165 \\ 0.2100 \\ 0.1725 \end{bmatrix}$$