Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти ее решение. Для первого требуется воображение, а для второго только умение.

Джон Десмонд Бернал,
английский физик и социолог науки

Системы поддержки принятия решений

7. Определение весов критериев

Общие сведения

Наиболее полный обзор методов определения коэффициентов важности приведен в статье [Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М. Методы определения коэффициентов важности критериев “Автоматика и телемеханика”, №8, 1997, с3-35].

Различаются два вида измерений: в первичных школах (наименований, порядка, интервалов и т.д.) и в производных шкалах (функций полезности и частот предпочтений). Среди первичных и производных измерений выделяются два подкласса типов измерений.

1 класс – первичные измерения:

- 1.А класс – попарные сравнения;
- 1.Б класс – точечные оценки на шкале.

2 класс – производные измерения:

- 2.А класс – функции ценности;
- 2.Б класс – частоты предпочтений.

Методы 1 класса делятся на:

1.А.1.Методы анализа матрицы попарного сравнения:

- 1А.1.1. Методы собственных векторов.
- 1А.1.2. Методы наименьших квадратов.
- 1А.1.3. Методы собственных векторов матрицы.

1.А.2. Ранговые методы.

1.Б.1. Балльные методы.

1А. Методы попарного сравнения

а) Метод Уэя (1.А.1).

Метод собственных векторов Уэя основывается на данных матрицы попарных сравнени $A = \left\| a_{ij} \right\|, a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$

где $\boldsymbol{a_{ij}=-1}$ означает превосходство параметра $\boldsymbol{x_j}$ над параметром $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{a_{ij}=0}$ – равноценность $\boldsymbol{x_i}$ и $\boldsymbol{x_j}$, а $\boldsymbol{a_{ij}=1}$ – превосходство параметра $\boldsymbol{x_i}$ над параметром $\boldsymbol{x_j}$.

Ввиду неудобства работы с отрицательными числами матрицу попарных сравнений можно превратить в неотрицательную матрицу $A^+ = \left\| a_{ij}^+ \right\|, a_{ij} \in \{0, 1, 2\},$ где числа (0,1,2) имеет вышеозначенный смысл.

Сложив числа по каждой из строк матрицы, будем иметь числовые характеристики важности параметров, а разделив их на общую сумму – получим весовые коэффициенты параметров:

$$\lambda_{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+} \quad 1)$$

Недостатком этой формулы является то, что она не учитывает важность "равноценных" (равноценности $\boldsymbol{x_i}$ и $\boldsymbol{x_j}$) и "проигрышных" (когда $\boldsymbol{x_i}$ превосходит $\boldsymbol{x_j}$) сравнений. Если устранить этот недостаток, то весовыми коэффициентами по сути являются координаты собственного вектора, соответствующего максимальному характеристическому числу матрицы попарных сравнений.

1А. Методы попарного сравнения

б) Метод Саати (1.А.1).

Предположим, что результаты попарного сравнения параметров описываются отношениями их весов, т.е. представимы в виде матрицы А (матрицы Саати).

$$A = \left\| \lambda_i / \lambda_j \right\|; i, j \in \overline{1, n}$$

Справедливо следующее равенство: $(A - nE)\overline{\Lambda} = 0$ (4.2)

где Е – единичная матрица; Λ – вектор весов.

Для нахождения вектора весов необходимо решить уравнение (4.2). Поскольку ранг матрицы равен 1, то n – единственное собственное число этой матрицы и, следовательно, уравнение (4.2) имеет ненулевое решение. Более того, это единственное решение, обладающее свойством

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Это решение и есть искомый вектор относительных весов параметров – вектор Саати.

Методы 1.А.1.2 и 1.А.2

1.А.1.2. Метод наименьших квадратов.

В этом методе весовые коэффициенты определяются путем решения оптимизационного уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^2 \to \min \qquad (4.3)$$

Для решения этого уравнения используется итеративный алгоритм Марквардта.

1.А.2.1. Метод средних рангов.

Как известно из теории квалиметрии, для определения весов применяется выражение

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij}^{1} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij} \qquad (4.4)$$

где $\boldsymbol{R1_{ij}}$ – преобразованный ранг параметра $\boldsymbol{i}$ у эксперта $\boldsymbol{j}$. Преобразование $\boldsymbol{R1_{ij}}$ состоит в том, что значение 0 – параметр с наименьшим рангом; 1 – следующий за ним и т.д.

Методы обработки и информации в произвольных шкалах

Этот класс содержит два подкласса.
2.А. Методы аппроксимации функции полезности.
2.А.1. Методы обобщенного критерия Подиновского.
2.А.2. Методы функций ценности.
2.А.3. Методы “уклонений”.
2.Б. Методы трансформации частот.
2.Б.1. Методы трансформации частот предпочтений.
2.Б.2. Методы трансформации частот отнесения к классу.
2.Б.3. Методы случайных векторов (рандомизации).
Наиболее часто используется метод Терстоуна, который относится к 2.Б.1, и его модификации.

2.Б.1.1. Метод Терстоуна

Метод представлен следующим алгоритмом:

Шаг 1. Составляется таблица, характеризующая число случаев, когда параметр ***xi*** определяется как более важный, чем параметр ***xj*** (матрица А).

Шаг 2. Строится матрица **P** для выявление процентного числа случаев, когда параметр ***xi*** оказывается более значим, чем ***xj*** (матрица $P=||p_{ij}||$, где $p_{ij} = a_{ij}/c$, где **c** – число экспертов).

Шаг 3. Матрица ***Z*** используется для преобразования элементов матрицы ***P*** в стандартные измерители различия:

$$P_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (4.5)$$

Шаг 4. Рассчитываются

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}; \overline{z_i} = \frac{1}{n} \bullet \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad (4.6)$$

Шаг.5. $\overline{z_i}$ преобразуется путем применения таблиц нормального распределения в процент площади нормального распределения, соответствующий значению весового коэффициента.