Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти ее решение. Для первого требуется воображение, а для второго только умение.

Джон Десмонд Бернал,
английский физик и социолог науки

Системы поддержки принятия решений

6. Методы, основанные на количественном выражении предпочтений ЛПР на множестве критериев

Метод приращений

ЛПР выражает свои предпочтения на множестве критериев, как правило, с помощью задания системы весовых коэффициентов. Данные методы можно условно разделить на две группы:

1) простые методы объединения характеристик;

2) методы объединения, основанные на порогах чувствительности.

Одним из основных методов 1-й группы является простой **метод приращений**.

Входные данные – множество вариантов решения. Каждый из этих вариантов предварительно оценивают. Оценка производится по нескольким заданным критериям. При каждой оценке (по каждому критерию) вариант получает свой порядковый номер. Затем каждый вариант будет поставлен на какое-либо место. Это место определяется оценкой порядковых номеров критериев. Затем строится квадратная матрица. $B=||b_{ir}||$ порядка N. Значение b_{ir} показывает, сколько раз i-й вариант x_i оценен как r-й по порядку.

Если заданы весовые коэффициенты, то b_{ir} – это сумма весов тех критериев, по которым вариант оценен по порядку, т.е. элементы матрицы можно интерпретировать как меру приращения r-го порядка i-му варианту.

Составляется матрица $Y=||y_{ir}||$, состоящая только из нулей и единиц. Изначально она вся нулевая. y_{ir} = 1, если варианту x_i приписан r-й порядок. Для нахождения решения решается задача целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} y_i r \rightarrow \max$$

при условии $\sum_{i=1}^{N} y_i r = 1, \sum_{r=1}^{N} y_{ir}, y_{ir} \geq 0$

Метод **SMART**

Применяется для оценки и выбора лучшей альтернативы на множестве заданных альтернатив. Этот метод представлен совокупностью следующих операций:

1) упорядочение критериев по важности;
2) присвоение наиболее важному критерию оценку 100 баллов и оценка в баллах каждого из критериев;
3) сложение полученных баллов;
4) нормировка весов критериев (т.е. деление присвоенных баллов на сумму весов);
5) измерение значения каждой альтернативы по всем критериям по шкале от 0 до 100 баллов;
6) определение общей оценки каждой альтернативы и выбор лучшей альтернативы, имеющей наибольшую оценку;
7) оценка чувствительности результата к изменениям весов.

Субъективная роль ЛПР проявляется в назначении баллов критериям. В методе SMART ЛПР выполняет сложную операцию задания весов критериев, поэтому метод чувствителен к ошибкам ЛПР.

Методы объединения, основанные на порогах чувствительности

Основу этих методов составляют методы класса ЭЛЕКТРА (ЭЛЕКТРА 1, ЭЛЕКТРА 2, ЭЛЕКТРА 3), которые были разработана коллективом французских ученых, возглавляемым профессором Б. Руа. Эти методы относятся к классу методов Разработки Индексов Попарного Сравнения Альтернатив (РИПСА).

В подходе РИПСА принято различать 2 этапа:

1) этап разработки, на котором строятся один или несколько индексов попарного сравнения альтернатив;

2) этап исследования, на котором построенные индексы используются для ранжирования (или классификации) заданного множества альтернатив.

ЭЛЕКТРА 1 позволяет из множества вариантов исключить неэффективные варианты. В основе данного метода лежит попарное сравнение отдельных вариантов.

ЭЛЕКТРА 2 служит для упорядочения индифферентных классов вариантов.

ЭЛЕКТРА 3 отличается от метода ЭЛЕКТРА 2 способом задания порогов чувствительности.

Метод ЭЛЕКТРА 1

Входными данными для метода является множество решений. Метод отсекает все неэффективные варианты. На множестве вариантов ***X*** производится попарное их сравнение, в результате которого строятся индексы согласия и несогласия.

Каждому из ***N*** критериев ставится в соответствие целое число ***w***, характеризующее важность критерия (фактически, вес критерия). Это число можно получить как количество голосов жюри, поданных за этот критерий.

Выдвигается гипотеза о превосходстве альтернативы A_i над альтернативой A_j. Множество $\mathbf{I}$, состоящее из ***N*** критериев, разбивается на 3 подмножества:

$\mathbf{I}^+$ – подмножество критериев, по которым A_i предпочтительнее A_j.

$\mathbf{I}^-$ – подмножество критериев, по которым A_j предпочтительнее A_i.

$\mathbf{I}^=$ – подмножество критериев, по которым A_i равноценна A_j.

Метод ЭЛЕКТРА 1 (продолжение)

Далее формируется индекс согласия с гипотезой о превосходстве A_i над A_j:

$$C_{AiAj} = \frac{\sum\limits_{i \in I^+, I^=} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_i} \qquad (1)$$

где w_i – вес i-го критерия. Индекс несогласия определяется на основе самого противоречивого критерия – того критерия, по которому A_i в наибольшей степени уступает A_j.

Длина шкалы – это своеобразная относительная единица, по которой сравниваются различные критерии. Цена деления каждой шкалы должна выбираться таким образом, чтобы отражать равную ценность (важность для принятия решения). Например, если стоимость в 1000 рублей играет такую же роль, как расстояние в 3 км, то цена деления шкалы "стоимость" – 1000, а "расстояние" – 3.

Для того чтобы учесть возможную разницу длин шкал, разность оценок по шкалам нормируют:

$$d_{AiAj} = \max_{i \in I^-} \frac{I^i_{Aj} - I^i_{Ai}}{L_i} \qquad (2)$$

где I^i_{Aj}, I^i_{Ai} – оценки альтернатив A_j и A_i по i-му критерию; L_i – длина шкалы i-го критерия.

Метод ЭЛЕКТРА 1 (продолжение)

Укажем очевидные свойства индекса согласия:

1) $0 \le C_{AiAj} \le 1$.

2) $C_{AiAj} = 1$, если I^- – пусто.

C_{AiAj} сохраняет своё значение при замене одного критерия несколькими с тем же общим весом.

Приведём свойства индекса несогласия:

1) $0 \le d_{AiAj} \le 1$.

2) d_{AiAj} сохраняет своё значение при введении более детальных шкал.

Индекс несогласия может быть назван "вето", т.к. он выполняет именно эту роль.

В методе ЭЛЕКТРА 1 бинарное отношение превосходства задаётся уровнями согласия и несогласия. Выдвигается гипотеза: альтернатива ***A**$_i$* превосходит альтернативу ***A**$_j$*. Если

$$\begin{cases} C_{AiAj} \ge \alpha_1 \\ d_{AiAj} \le \gamma_1 \end{cases}$$

где α_1, γ_1 – заданные уровни согласия и несогласия, то гипотеза верна. Если же при этих уровнях альтернативы не удаётся сравнить, то они объявляются несравнимыми.

Метод ЭЛЕКТРА 1 (продолжение)

При заданных условиях выделяется ядро недоминируемых альтернатив. При изменении уровней α и γ выделяется меньшее ядро и т.д., пока не будет исчерпан весь список альтернатив. В последнее ядро входят лучшие альтернативы. В конечном итоге получается групповая ранжировка альтернатив по качеству.

Для каждой пары вариантов x_i и x_j определяются еще два множества: множество согласований $\boldsymbol{G_{ij}}$ и множество рассогласований $\boldsymbol{D_{ij}}$.

$$G_{ij} = E_{ij} \cup E_{i\square j} = \left\{ k \in x \mid x_i R_k x_j \right\} \qquad D_{ij} = E_{ji} = \left\{ k \in x \mid x_j R_k x_i \right\}$$

Определим мощность множества согласований.

$$G_{ij} = \frac{\sum\limits_{k=E_{ij}} p_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} p_k}$$

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ – система весовых коэффициентов.

Метод ЭЛЕКТРА 1 (продолжение)

Если веса нормализованы, то

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1, \qquad G_{ij} = \sum_{k=E_{ij}} p_k$$ – коэффициент согласования.

Если x_i предпочтительнее x_j по всем критериям, то G_{ij}=1.

Коэффициенты рассогласования определены по критериям, где x_i предпочтительнее x_j:

$$\max_{i \in E_{ij}} (Z_{jk} - E_{ik}) \; при \; E_{ij} \neq 0$$

d_k^{max} – максимальный размах значений k-го критерия. Он определяется на основе анализа матрицы частных значений $\underset{\max}{Z} = \| z_{ik} \|$:

$$d_k^{\max} = \max_{k \in E} (z_{jk} - z_{jk}), \; d_i = 0, \; если \; E_{ij} = 0$$

Из рассмотрения исключаются варианты, у которых коэффициенты согласования близки к нулю, а коэффициенты рассогласования – к единице.

Метод ЭЛЕКТРА 2

Метод предназначен для идентификации и упорядочивания индифферентных (безразличных) классов вариантов. В основе метода лежит сравнение заданных ЛПР порогов предпочтения с некоторой функцией $F(S_{ij}, S_{ji}, S_{i\square j})$, где $S_{ij} = \sum_{k \in E_{ij}} p_k$, $S_{ji} = \sum_{k \in E_{ji}} p_k$ $S_{i\square j} = \sum_{k \in E_{i\prod j}} p_k$

Порог предпочтения в данном методе показывает, какое наименьшее значение должна принимать функция $\boldsymbol{F}$, чтобы вариант $\boldsymbol{A_i}$ был предпочтительнее варианта $\boldsymbol{A_j}$.

Индексы согласия и несогласия подсчитываются также, как в ЭЛЕКТРА 1. Вводятся 2 уровня согласия и несогласия (α_1 и α_2, γ_1 и γ_2) и два отношения предпочтения σ_1 и σ_2: σ_1 – сильное отношение предпочтения и σ_2 – слабое отношение предпочтения, $\sigma_1 \in \sigma_2$.

На заданном множестве альтернатив выявляются альтернативы, находящиеся в отношении σ_1 и σ_2. Выявляется 1-е ядро, в которое входят недоминируемые альтернативы, они удаляются, строится 2-е ядро и т.д. Каждой альтернативе присваивается индекс, соответствующий номеру ядра. Строится полный порядок на этих альтернативах. Второй полный порядок строится от худших к лучшим альтернативам. Если эти порядки не сильно отличаются друг от друга, то на их основе строится средний порядок, который предъявляется ЛПР.

Метод ЭЛЕКТРА 3

Данный метод основан на задании системы весовых коэффициентов критериев, поэтому на начальном шаге ЛПР должен выполнить операцию задания весов критериев, которая является сложной операцией.

На основе определённых весов критериев вычисляются значения функции соответствия $\mu(X_i, X_j)$, описывающей размытое отношение предпочтений ЛПР на множестве вариантов. Также при использовании данного метода необходимо выбрать различающую способность ЛПР, то есть величину, определяющую изменение порога чувствительности λ_k на каждом итерационном шаге. Данная операция может быть отнесена к разряду допустимых, так как, по существу, сводится к операции сравнения изменений оценок двух критериев.

В данном методе пороги чувствительности λ задаются по некоторому формальному правилу и постепенно модифицируются в ходе расчетов.

Для $\forall x_i$ вводится $g^{\lambda}(x_i)$ – классификация по порогу λ (λ-классификация варианта x_i). $g^{\lambda}(x_i)= p^{\lambda}(x_i) - f^{\lambda}(x_i)$, λ – порог чувствительности, $p(x_i)$ – число вариантов, по отношению к которым вариант x_i явно предпочтительнее, а $f(x_i)$ – число вариантов, которые явно предпочтительнее варианта x_i.

Порог чувствительности определяется относительно функции принадлежности $\mu(x_i, x_j)$: $\lambda_0=\max\mu(x_i, x_j)$.