Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти ее решение. Для первого требуется воображение, а для второго только умение.

Джон Десмонд Бернал,
английский физик и социолог науки

Системы поддержки принятия решений

5. Нечеткая логика

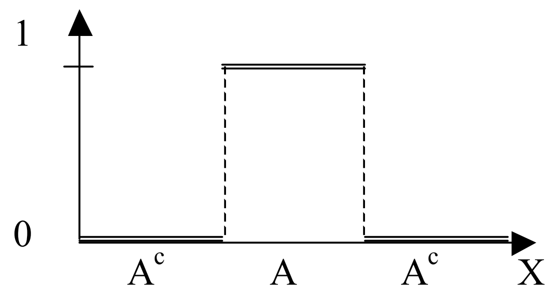
Понятие чёткого множества

Рассмотрим понятие **чёткого множества**. Основой чёткого множества является характеристическая функция χ_A: $\chi_A : x \to \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, x \notin A \\ 1, x \in A \end{cases}$$

Характеристическая функция позволяет однозначно определить принадлежность некоторого элемента рассматриваемому множеству. Элемент либо принадлежит множеству (χA=1), либо нет (χA=0).

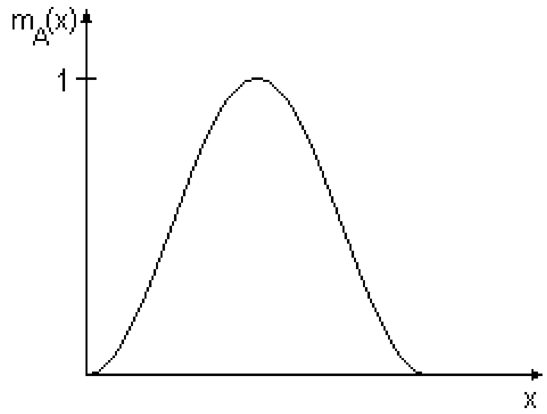
Следствием теории чётких множеств является булева логика, всё то множество схем рассуждений и выводов, которые опираются на понятие характеристической функции. Но стоит ввести неоднозначность в определение принадлежности элемента множеству, как получится совершенно иная, *неаристотелева* логика рассуждений.



Понятие нечёткого множества

Создателем нечёткой логики считается Л.А. Заде из Калифорнийского университета. В основе нечёткой логики лежит теория *нечётких множеств.*

В теории нечётких множеств вместо характеристической функции используется функция принадлежности m_A: $X \rightarrow [0,1]$. m_A – это *субъективная* оценка степени принадлежности элемента **x** к множеству **A**.



Например, понятие "маленького числа" (на множестве от нуля до 10) можно определить в виде нечёткого множества следующим образом:

A = 1/0+1/1+0.8/2+0.5/3+0.1/4+0/5+0/6+0/7+0/8+0/9+0/10

Операции над нечеткими множествами

0. Вхождение одного множества в другое:

$A \subset B \leftrightarrow m_A(x) \leq m_B(x), \quad \forall x \in X$

1. Отрицание нечёткого множества:

$m^c{}_A(x) = 1 - m_A(x)$

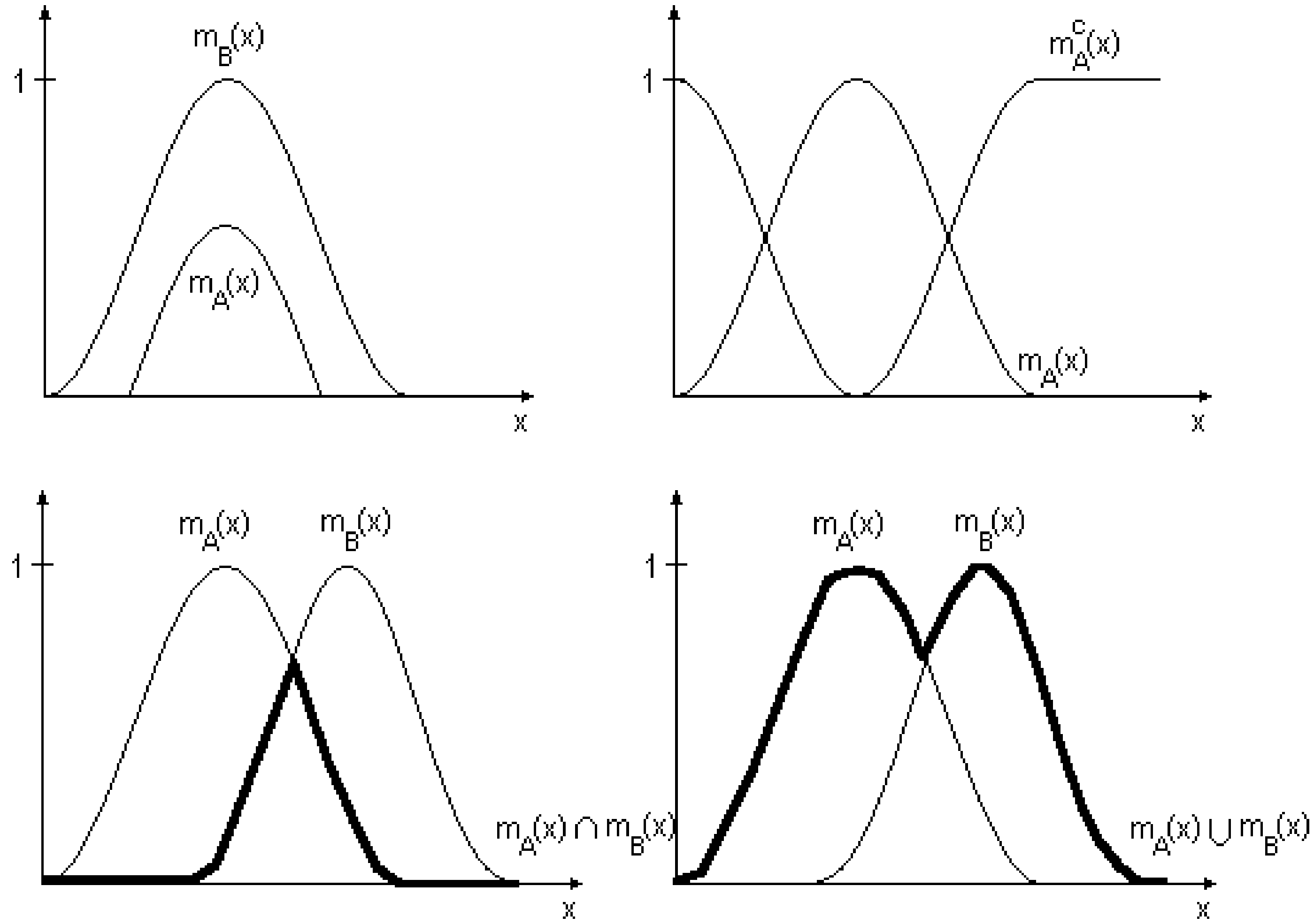
2. Пересечение двух множеств (минимум двух функций принадлежности):

$m_{A \cap B}(x) = m_A(x) \Lambda m_B(x)$

3. Объединение двух множеств (максимум двух функций принадлежности):

$m_{A \cup B}(x) = m_A(x) \vee m_B(x)$

Операции над нечеткими множествами



Операции над нечеткими множествами

В нечётких множествах *закон комплементарности*, в общем случае, не выполняется (рис.4), т.е.

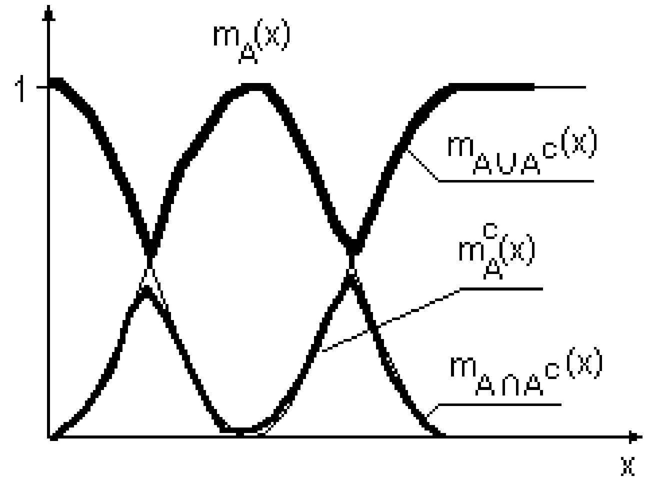
$A \cap A^c \supset 0, A \cup A^c \subset X$

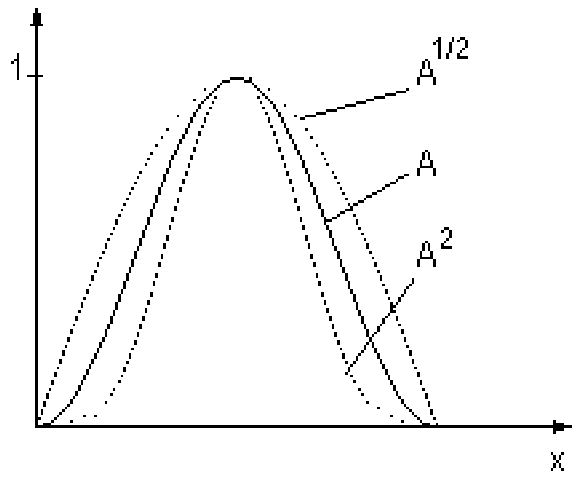
Над функциями принадлежности можно выполнять множество операций, имеющих весьма интересную интерпретацию. Одной их таких операций является возведение в степень.

Степень α нечёткого множества A (α>0) определяется следующим образом:

$$m^{\alpha}A(x) = \{m_A(x)\}^{\alpha} \qquad \forall x \in X$$

Например, A^2 сужает диапазон некоторой нечёткой информации, а $A^{1/2}$ – расширяет.





Операции над нечеткими множествами

1. *Алгебраическое произведение* A·B

$$m_{A\cdot B}(x) = m_A(x) \cdot m_B(x)$$

2. *Граничное произведение* A⊗B

$$m_{A\otimes B}(x) = (m_A(x)+m_B(x) - 1) \vee 0$$

3. *Драстическое* (от англ. drastic – решительный) *произведение* AΔB

$$m_{A\Delta B} = \begin{cases} m_A(x) \ \textit{при} \ m_B(x)=1 \\ m_B(x) \ \textit{при} \ m_A(x)=1 \\ 0 \ \text{в других случаях} \end{cases}$$

4. *Алгебраическая сумма* A+B

$$m_{A+B}(x) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x)m_B(x)$$

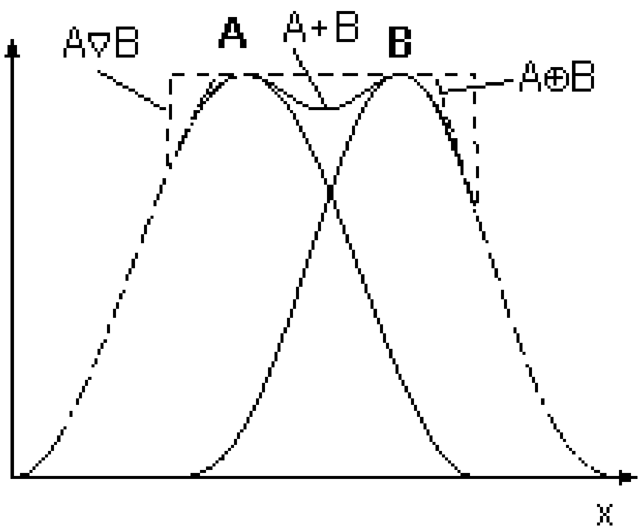
Операции над нечеткими множествами

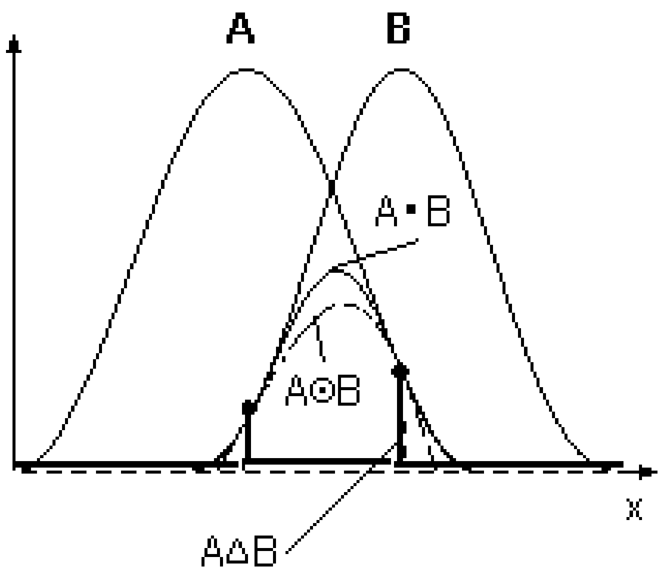
5. *Граничная сумма* A⊕B

$$m_{A\oplus B}(x) = (m_A(x) + m_B(x)) \wedge 1$$

6. *Драстическая сумма* A∇B

$$m_{A\nabla B} = \begin{cases} m_A(x) \; при \; m_B(x) = 0 \\ m_B(x) \; при \; m_A(x) = 0 \\ 1 \; \text{в других случаях} \end{cases}$$





Нечеткие множества N-го рода

Для нечёткого множества *первого рода* функция принадлежности выглядит как отображение

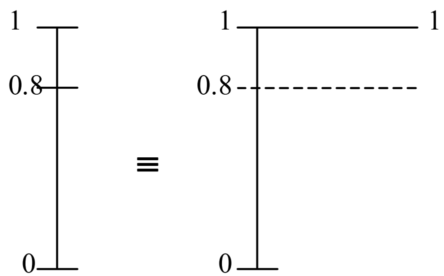
m_A: $X \to [0,1]$ $\qquad$ ($m_A(x) \subset [0,1]$, $x \subset X$,)

Нечёткое множество *второго рода* осуществляет отображение:

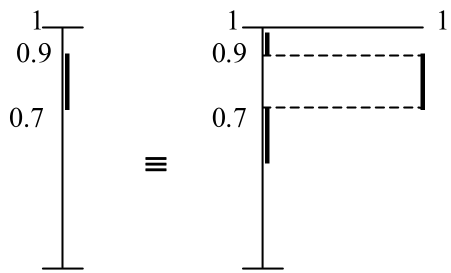
m_A: $X \to [0,1][0,1]$

Т.е. используются не точные оценки в определенном интервале, а в качестве значений $m_A(x)$ берется *нечёткое множество над значениями оценки* в [0,1].

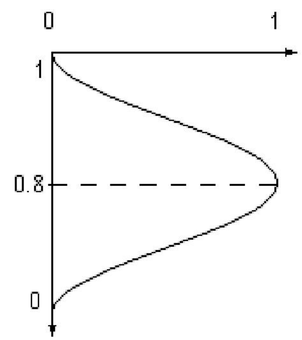
Например, пусть принадлежность некоторой величины x к A оценивается в 80%. Это может быть реализовано в виде нечёткого множества (НМ) 1-го рода (рис. а). Если величина именно в 80% вызывает у нас сомнения, то можно сказать, что наша оценка *лежит в интервале* от 0.7 до 0.9 (рис. б). Можно сказать, что сама оценка представляет собой нечёткое множество. И тогда мы будем иметь дело уже с *НМ 2-го рода* (рис. в).



а) НМ 1-го рода



б) НМ со значением в интервале



в) НМ 2-го рода

Нечеткая логика

Рассмотрим расширение операций НЕ, И, ИЛИ до нечётких операций, называемых нечётким отрицанием, t-нормой и s-нормой соответственно.

Дадим сначала определение того, *какими свойствами* должна обладать операция, а затем приведем *примеры возможной реализации* этой операции.

Аксиоматика определений:

Нечёткое отрицание

$\sim : [0,1] \rightarrow [0,1]$

а) $\tilde{}0 = 1$

б) $\tilde{}\,(\tilde{}x) = x$

в) $x_1 < x_2 \rightarrow \tilde{}x_1 > \tilde{}x_2$

(т.е. ~ – монотонная строго убывающая функция).

Пример нечёткого отрицания ~: $\tilde{}x = 1 - x$

Нечеткая логика

t-норма (триангулярная норма)

T: $[0,1]\mathrm{x}[0,1] \to [0,1]$

$T1$: $xT1 = x,\ xT0 = 0$

$T2$: $x_1Tx_2 = x_2Tx_1$

$T3$: $x_1T(x_2Tx_3) = (x_1Tx_2)Tx_3$

$T4$: $x_1 \le x_2 \to x_1Tx_3 \le x_2Tx_3$

В качестве примеров t-нормы можно рассмотреть такие операции, как:

1) операция min (или логическое произведение): $x_1Tx_2 = x_1 \wedge x_2$
2) $x_1 \cdot x_2 = x_1x_2$
3) $x_1 \otimes x_2 = (x_1+x_2-1) \vee 0$
4) $x_1 \Delta x_2 = \begin{cases} x_1 & \text{при } x_2 = 1 \\ x_2 & \text{при } x_1 = 1 \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$

Нечеткая логика

s-норма

S: [0,1]x[0,1] $\rightarrow$ [0,1]

$S1$: xS1 = 1, xS0 = x

$S2$: $x_1 S x_2 = x_2 S x_1$

$S3$: $x_1 S(x_2 S x_3) = (x_1 S x_2) S x_3$

$S4$: $x_1 \leq x_2 \rightarrow x_1 S x_3 \leq x_2 S x_3$

В качестве примеров s-нормы можно рассмотреть такие операции, как:

1) операция max (или логическая сумма): $x_1 S x_2 = x_1 \vee x_2$
2) $x_1 \dotplus x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2$
3) $x_1 \oplus x_2 = (x_1 + x_2) \Lambda 1$
4) $$x_1 \nabla x_2 = \begin{cases} x_1 & при \ x_2 = 0 \\ x_2 & при \ x_1 = 0 \\ 1 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Нечеткие выводы

На практике нечёткая логика применима особенно тогда, тогда мы имеем дело с приближенными рассуждениями – приближенными оценками, приближенными правилами и т.п.
Пусть, к примеру, существуют знания эксперта в виде:
<u>Если</u> "*уровень воды высокий*", <u>То</u> "*открыть кран*"

антецедент (предпосылка) — консексвент (заключение)

Вопрос: что необходимо сделать в той ситуации, когда *"Уровень воды довольно высокий"?*

Использование нечётких множеств для понятия "*Высокий*" ("*уровень воды высокий*") дает следующий результат:

"*Высокий*" = 0.7/1.5м + 0.3/1.6м + 0.7/1.7м + ... + 1/2м + 1/2.1м + 1/2.2м

Аналогично определим понятие "*Открыть*" ("*открыть кран*"):

"*Открыть*" = $0.1/30^o + 0.2/40^o + ... + 0.8/70^o + 1/80^o + 1/90^o$

Нечеткие выводы

Понятие *"Уровень воды довольно высокий"*:

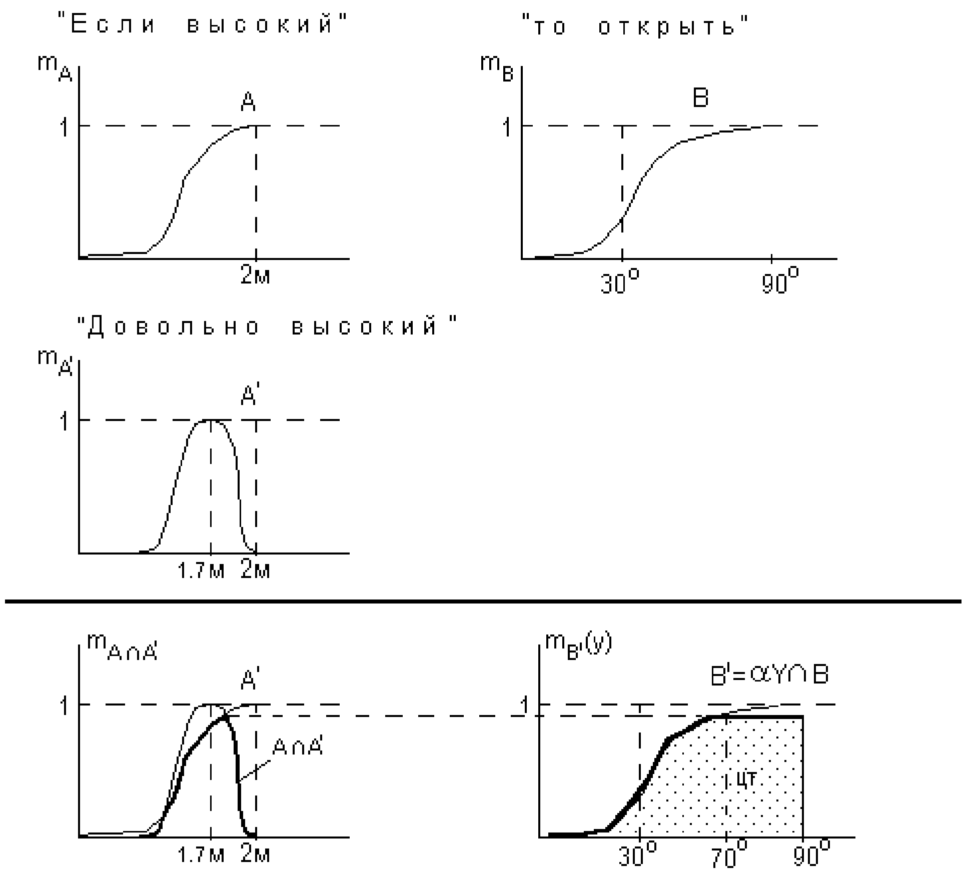
"Довольно высокий" = 0.5/1.6м + 1/1.7м + 0.8/1.8м + 0.2/1.9м

Получаем следующую формальную схему:

Если *Высокий*, То *Открыть*

"Довольно высокий"

?



Процесс обратного нечёткого вывода, рассмотренный выше, называется *дефадзификацией*.

Нечеткая импликация

Основная операция логического вывода – импликация.
Обычно в качестве импликации используется t-норма типа логического произведения:

$x_1 \to x_2 = x_1 \Lambda x_2$

$m_R(x,y) = m_{A\to B}(x,y) = (1 - m_A(x) + m_B(y)) \;\Lambda\; 1$

Итак, если дано знание эксперта в виде нечёткого отношения R=A→B, то процесс получения нечёткого результата вывода B' с использованием данных наблюдения A' и знания A→B можно представить как B' = A'•R = A'•(A→B), где '•'- т.н. композиционное правило нечёткого вывода.
В частности, имеем:

$$m_{B'} = \underset{x\in\infty}{V}[m_{A'}(x)\,\Lambda\, m_R(x,y)] = \underset{x\in\infty}{V}[m_{A'}(x)\,\Lambda\,(m_A(x)\Lambda m_B(y))] = [\underset{x\in\infty}{V}(m_{A'}(x)\,\Lambda\, m_A(x))]\,\Lambda\, m_B(y) =$$

$$= \underset{x\in\infty}{V} m_{A'\cap A}(x)\,\Lambda\, m_B(y) = \alpha\,\Lambda\, m_x(y) = m_{\alpha Y\cap B}(y)$$

Осталось определить центральную точку:

$$ЦТ = \frac{\int_Y y m_{B'}(y)dy}{\int_Y m_{B'}(y)dy}$$

Т.е. в качестве ЦТ можно выбрать центр тяжести композиции максимум-минимум.