Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти ее решение. Для первого требуется воображение, а для второго только умение.

Джон Десмонд Бернал,
английский физик и социолог науки

Системы поддержки принятия решений

3. Аксиомы рационального поведения. Многокритериальная теория полезности (MAUT)

Аксиомы рационального поведения

Основной областью применения теории принятия решений является экономика. Одно из главных допущений экономической теории заключается в том, что человек делает *рациональный выбор*. Это означает, что решение человека является результатом упорядоченного процесса мышления. Упорядочение понимается в строго математической форме, т.е. вводятся аксиомы рационального поведения.

Обозначим через x,y,z различные исходами (результаты) процесса выбора, а через p,q – вероятности тех или иных исходов. Лотереей называется игра с двумя исходами: исходом x, получаемым с вероятностью p, и исходом y, получаемым с вероятностью $(1-p)$. Аксиомы формулируются так:

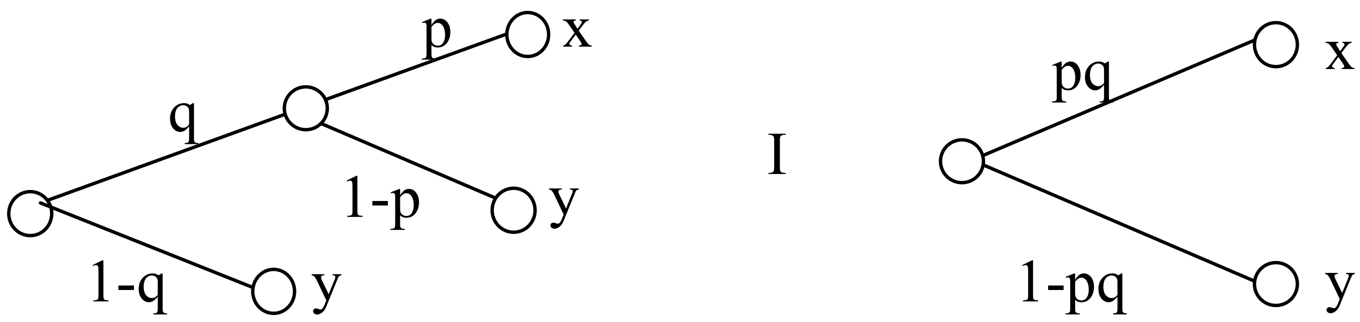
1) Исходы x,y,z принадлежат множеству исходов А, т.е. рассматриваются только вероятные исходы.

2) Пусть Р означает строгое предпочтение (подобно '>' в математике), R – нестрогое предпочтение (похожее на '≥' в математике), I – безразличие (подобное отношению '='). Эта аксиома требует выполнения двух условий:

- связности (полноты): либо $(x\ R\ y)$, либо $(y\ R\ x)$, либо то и другое вместе;
- транзитивности: из $(x\ R\ y)$ и $(y\ R\ z)$ следует $(x\ R\ z)$.

Аксиомы рационального поведения

3) Две представленные на рисунке лотереи находятся в отношении безразличия:



Это записывается так: ((x, p, y) q, y) I (x, pq, y).

Эта аксиома позволяет заменить левую лотерею на правую, которая является более простой для понимания и оценки.

Аксиомы рационального поведения

4) Если $(x\ I\ y)$, то $(x, p, z)\ I\ (y, p, z)$.

5) Если $(x\ P\ y)$, то $(x\ P\ (x, p, y)\ P\ y)$.

6) Если $(x\ P\ y\ P\ z)$, то существует вероятность p, такая, что $(y\ I\ (x, p, z))$. Последнюю аксиому можно назвать правилом "золотой середины": если человек выбирает между "средним" вариантом и лотереей, в которой участвуют лучший и худший варианты, то при определённой вероятности наступления худшего варианта он может предпочесть выбор среднего по качеству варианта выбору этой лотереи.

Доказана следующая теорема: если аксиомы (1-6) выполняются, то существует числовая **функция полезности U**, определенная на множестве исходов A и такая, что:

$(x\ R\ y)$ тогда и только тогда, когда $U(x) \geq U(y)$;

$U(x, p, y) = pU(x) + (1\text{-}p)U(x)$.

Функция U(x) – единственная с точностью до линейного преобразования (например, если $U(x) \geq U(y)$, то $a+U(x) \geq a+U(y)$, где a – целое число, a>0).

Задачи с урнами

Урна – это непрозрачный сосуд, в котором находятся шары различного цвета. Соотношение шаров известно только экспериментатору. Человек делает выбор с этих задач, основываясь на расчетах и теории вероятности.

Задача. Пусть экспериментатор случайным образом выбирает для испытуемого урну из множества урн, содержащего 700 урн первого типа и 300 урн второго типа. Если перед испытуемым находится урна типа 1 и он это угадает, то получит выигрыш в 350 единиц, если не угадает – проиграет 50 единиц. Если перед испытуемым находится урна типа 2 и он это угадает, то получит выигрыш в 500 единиц, если не угадает – проиграет 100 единиц. Сведем эти данные в таблицу.

Тип урны	Вероятность выбора урны данного типа	Действия и выигрыши	
		d1	d2
1	0.7	350	–100
2	0.3	–50	500

Задача с урнами. Продолжение

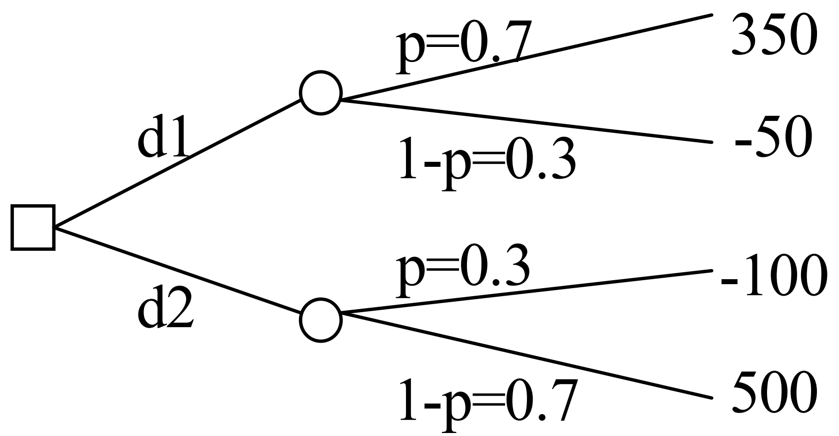
В соответствии с теорией полезности следует оценить полезность каждого действия и выбрать действие с максимальной полезностью:

U(d1) = 0.7*350 – 0.3*50 = 230

U(d2) = 0.3*500 – 0.7*100 = 80

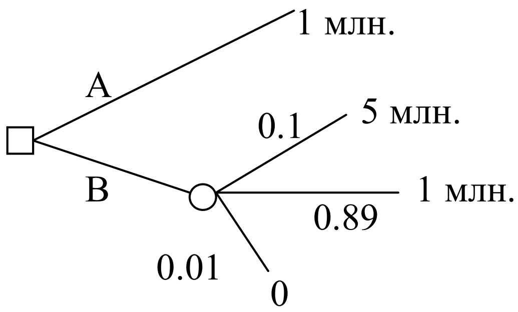
Таким образом, разумный человек выберет действие d1.

Решение этой и подобных задач может быть представлено в виде дерева решения:

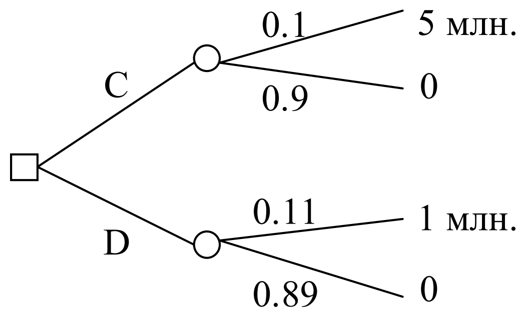


Парадокс Алле

В экспериментах с реальными задачами был обнаружен интересный эффект, названный в честь одного из первооткрывателей французского ученого М. Алле *парадоксом Алле*. Рассмотрим две лотереи:



а)



б)

Обозначим U(5 млн.)=1, U(1 млн.)=U, U(0)=0.

В случае а) люди в подавляющем большинстве случаев выбирают вариант А – отказ от лотереи и гарантированный выигрыш в 1 млн., откуда следует, что:

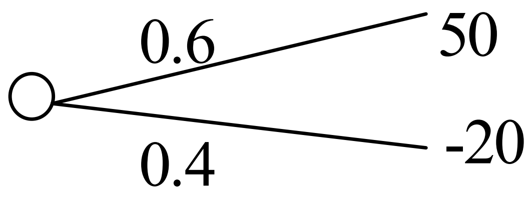
$U > 0.1*1 + 0.89*U$ и $U>10/11$.

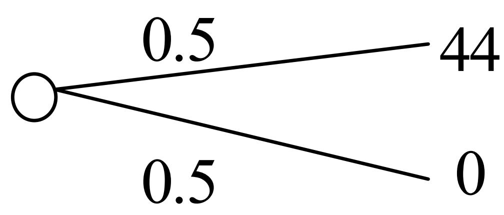
В случае б) есть выбор между двумя лотереями – С и D. Подавляющее большинство людей выбирают вариант С: вероятность выигрыша почти та же, а сам выигрыш гораздо больше. При этом:

$0.1*1 > 0.11*U$ и $U<10/11$.

Получается, что люди совершают свой выбор не в соответствии с функцией полезности.

Другие примеры "нерациональности" поведения людей





Равноценные лотереи: 0.6*50 – 0.4*20 = 0.5*44 + 0.5*0

Критерии упорядочены по важности: c1 > c2 > c3.

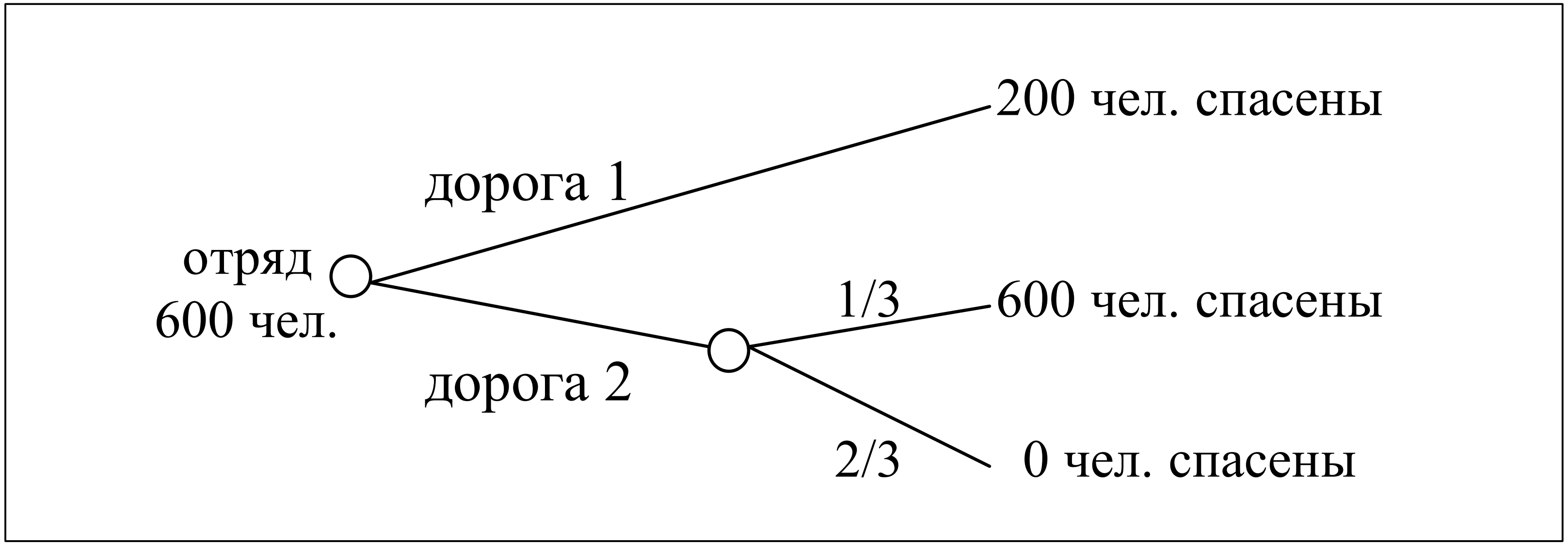
Критерии c1 c2 c3
Вариант A (5 2 3)
B (4 4 4)

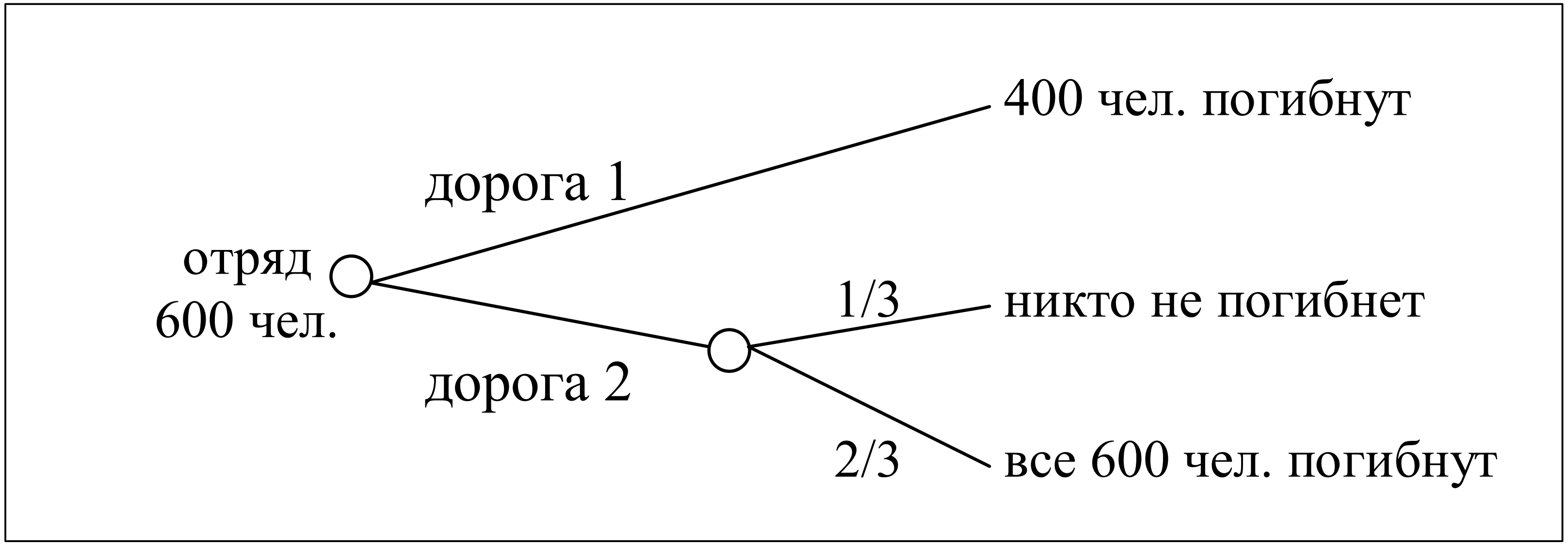
Критерии c1 c2 c3
Вариант B (4 4 4)
C (3 5 5)

Критерии c1 c2 c3
Вариант C (3 5 5)
A (5 2 3)

В результате: A < B < C < A

Дилемма генерала





Эвристики, используемые людьми при принятии решений

Суждение по представительности. Часто классификация объектов (или ситуаций) производится людьми на основании того, что объект A похож на объект B, принадлежащий к классу Q; при этом априорная вероятность того, что объект A принадлежит к классу Q, просто не учитывается (игнорируется).

Суждение по встречаемости. Люди часто определяют вероятность события по тому, насколько часто они сами сталкивались с этим событием и насколько важными для них были эти ситуации, какое эмоциональное воздействие они оказали.

Суждение по точке отсчёта. Если при определении вероятности используется начальная информация как точка отсчёта, то она существенно влияет на результат.

Сверхдоверие. Люди чрезмерно доверяют своим суждениям, особенно, если это касается прошлых событий.

Стремление к исключению риска. Люди склонны выбирать менее выигрышные альтернативы, если при этом исключена вероятность проигрыша.

Изменение выбора при смене знака. Если задача сформулирована в терминах выигрышей, то человек стремится получить гарантированный выигрыш; а если в терминах потерь, то он стремится минимизировать потери.

Аксиомы MAUT

Аксиомы MAUT – это некоторые условия, которым должна удовлетворять функция полезности ЛПР.

Первые аксиомы подобны аксиомам рационального поведения:

1) Аксиома полноты – все альтернативы сравнимы:

$\forall$ x,y $\in$ A: U(x)>U(y) | U(x)<U(y) | U(x)=U(y).

2) Аксиома транзитивности:

$\forall$ x,y,z $\in$ A: U(x)>U(y) и U(y)>U(z) $\Rightarrow$ U(x)>U(z).

3) Аксиома "золотой середины" (лучше синица в руке, чем журавль в небе):

$\forall$ x,y,z $\in$ A: U(x)>U(y)>U(z), 0≤α≤1: αU(x)+(1-α)U(z)=U(y).

Аксиома 3 основана на предположении, что функция полезности непрерывна и можно использовать любые малые части полезности альтернатив.

Аксиомы MAUT

Условия независимости позволяют утверждать, что некоторые взаимоотношения между оценками альтернатив по критериям не зависят от значений по другим критериям. Приведём некоторые условия:

1) Независимость по разности.

Если оценки альтернатив отличаются только по одному критерию, то предпочтения между этими альтернативами не зависят от фиксированных значений оценок по другим критериям.

2) Независимость по полезности.

Критерий C1 называется независимым по полезности от критериев C2, C3,…,CN, если порядок предпочтения лотерей, в которых меняется лишь уровень критерия C1, не зависит от фиксированных значений по другим критериям.

3) Независимость по предпочтению.

Два критерия C1 и C2 являются независимыми по предпочтению от других критериев, если предпочтения между альтернативами, различающимися только оценками по этим двум критериям не зависят от фиксированных значений оценок по другим критериям.

Пример нарушения независимости по предпочтению

Приведём пример нарушения этой аксиомы – выбор дачи для летнего отдыха. Есть три критерия "Комфортность дачи", "Наличие магазина" и "Расстояние до города" и два варианта: А("комфортность хорошая", "магазина нет", "дача расположена недалеко от города") и В("комфортность средняя", "магазин есть", "дача расположена недалеко от города").

И вариант А для ЛПР предпочтительнее варианта В.

В то же время, если оба варианта будут иметь по критерию "Расстояние до города" оценку "Дача расположена далеко от города", вариант В может оказаться предпочтительнее, чем А.

Критерии	Вариант A	Вариант B	Вариант C	Вариант D
Комфортность дачи	хорошая	средняя	хорошая	средняя
Наличие магазина	нет	да	нет	да
Расстояние до города	недалеко	недалеко	далеко	далеко

Основная теорема MAUT

На основной теореме MAUT базируются практические методы оценки альтернатив.

Если условия независимости по полезности и независимости по предпочтению выполнены, то функция полезности является аддитивной (1) или мультипликативной (2):

$$U(x) = \sum_{i=1}^{?N} w_i U_i(x) \text{ при } \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{1}$$

$$1 + kU(x) = \prod_{i=1}^{N} [1 + kk_i U_i(x)] \text{ при } 1 + k = \prod_{i=1}^{N} [1 + kk_i] \tag{2}$$

где U, U_i – функции полезности, изменяющиеся в пределах от 0 до 1;
w_i – коэффициенты важности (веса) критериев, причём $0 < w_i < 1$;
коэффициент $k>-1$. (Коэффициенты k_i определяются из условия.)
Т.о., многокритериальную функцию полезности можно определить, если известны значения коэффициентов w_i и k, а также однокритериальные функции полезности $U_i(x)$.

Пример использования MAUT

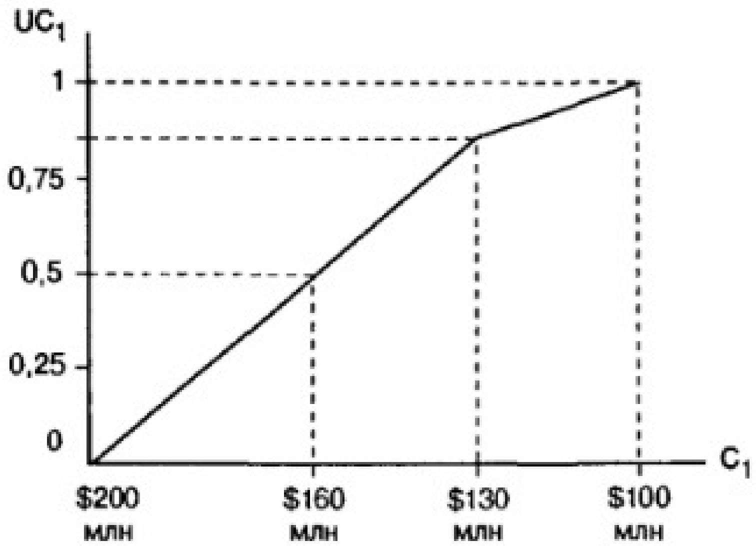
Пример: строительство аэропорта.

Критерий	Наихудшее значение	Наилучшее значение
C1 – стоимость постройки	200 млн.	100 млн.
C2 – время поездки от города	90 мин.	40 мин.
C3 – количество людей, подвергающихся шумовому воздействию	50`000	5`000

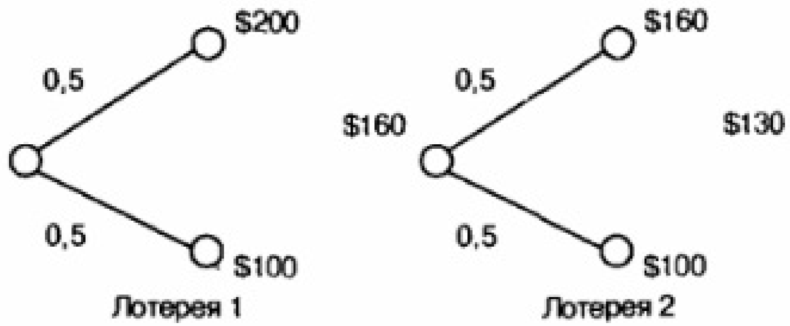
Последовательность действий:

1) Построение однокритериальных функций полезности.
2) Проверка условий независимости.
3) Определение весовых коэффициентов (коэффициентов важности критериев).
4) Определение полезности альтернатив.

Пример использования MAUT (продолжение)

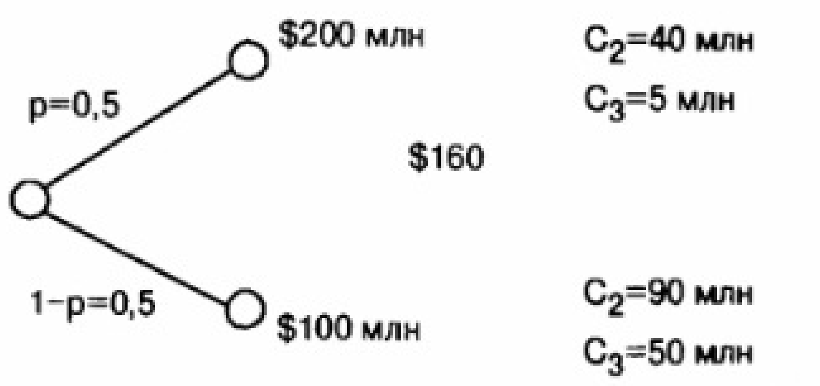


Функция полезности для критерия
C_1 «Стоимость постройки аэропорта»



Типовые лотереи, используемые при построении функции полезности по одному критерию

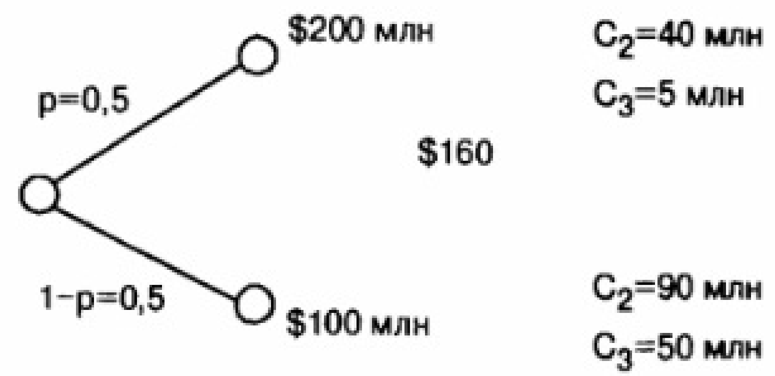
Пример использования MAUT (продолжение)



Проверка условий независимости по полезности

Эквивалент определенности ищется при всех лучших оценках по другим критериям и при всех худших. Если они совпадают, есть независимость по полезности.

Пример использования MAUT: проверка условия независимости по полезности



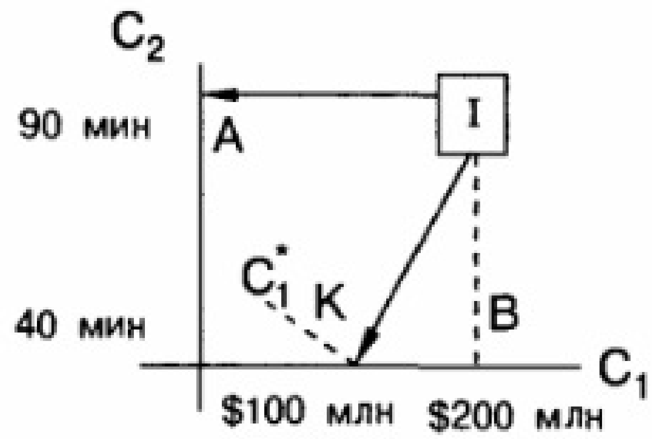
Проверка условий независимости по полезности

Первоначально известны две точки функции полезности: U ($100 млн)=1, U ($200 млн)=0. Для нахождения промежуточных точек используются типовые лотереи. В лотерее 1 перед ЛПР ставится следующая задача: «Определите эквивалент определенности для лотереи, имеющей с равными вероятностями (p=0,5) минимальную и максимальную стоимости постройки». ЛПР предъявляют ряд значений (например, $120 млн, $130 млн и т.д.) и спрашивают: выше или ниже данного значения находится, по его мнению, эквивалент определенности. Предположим, что ЛПР остановился на значении $160 млн. Тогда делается вывод, что U =0,5 соответствует $160 млн.

Аналогично определяются другие значения функции полезности. Эквивалент определенности ищется при всех лучших оценках по другим критериям и при всех худших. Если они совпадают, есть независимость по полезности.

Пример использования MAUT: проверка условия независимости по предпочтению

Первоначально ЛПР должен определить свое предпочтение между альтернативами [(C2) min ; (C1) max] и [(C2) max; (C1) min] .
В нашем случае ЛПР сравнивает площадки для постройки аэропорта с оценками (90, $100 млн) (40, $200 млн) – две крайние точки A и B на осях, при значении C3 = 5 тыс.
Пусть вариант A предпочтительнее.
Это означает, что критерий стоимости более важен для ЛПР, чем критерий расстояния.

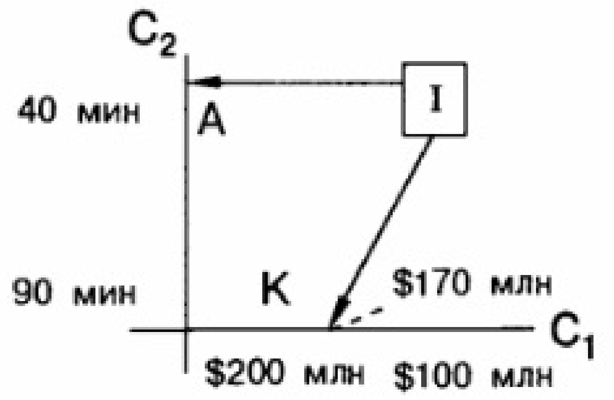


Проверка условия независимости по предпочтению

Далее определяется такая точка на шкале критерия C1 , что варианты A и K одинаково предпочтительны для ЛПР. Иначе говоря, ищется такая стоимость строительства C1 , при которой одинаково предпочтительны варианты (90, $100 млн) и (40, C1*). Затем точно такой же поиск точки безразличия осуществляется при C3 = 50 тыс. Если результаты совпадают, то делается вывод, что пара критериев C1, C2 не зависит по предпочтению от третьего критерия.

Пример использования MAUT: определение коэффициентов важности критериев

Сначала лицу, принимающему решение, сообщается, что при нахождении эквивалента определенности он должен принять во внимание, что по остальным критериям имеются наилучшие значения. Затем перед ЛПР ставится та же задача, но уже при предположении, что по прочим критериям имеются наихудшие значения (снизу справа на рис. 4.3). Если эквивалент определенности в двух случаях одинаков, то делается вывод, что критерий не зависит по полезности от прочих критериев.



Определение отношения между весами критериев C_1 и C_2

Пример использования MAUT: определение полезности альтернатив

В нашем случае вид функции – аддитивная.
Считая сумму коэффициентов важности критериев достаточно близким к единице, выбираем аддитивную форму представления функции полезности.
Пусть заданы четыре альтернативы со следующими оценками:
A ($180 млн, 70 мин., 10 тыс.);
B ($170 млн, 40 мин., 15 тыс.);
C ($160 млн, 55 мин., 20 тыс.);
D ($150 млн, 50 мин., 25 тыс.).
Подставляя в формулы для вычисления полезности альтернатив значения полезностей оценок и веса критериев, получаем:
U(A) = 0,55 * 0,25 + 0,22 * 0,4 + 0,33 * 0,89 = 0,52;
U(B) = 0,684; U(C) = 0,66; U(D) = 0,705;
U (D) => U (B) => U (C) => U (A).
Итак, альтернатива D — лучшая .