Карпов В.Э.

Недоопределенные модели

Программирование в ограничениях

1. Декларативность. Не описание алгоритма решения задачи, а описание ее модели.
2. Модель - совокупность отношений между параметрами задачи (ограничения). Ограничения могут иметь вид уравнений, неравенств, логических выражений и т.п.
3. Вычислительная эффективность.

Постановка задачи

- Пусть на переменные x_1, x_2 ..., x_n, областями значений которых являются множества X_1 , X_2 , ..., X_n , заданы **ограничения** $C_i\,(x_1 , x_2 , ..., x_n)$, $i = 1, k$.

- Требуется найти наборы значений $<a_1 , a_2 , ..., a_n>$ ($a_i \in X_i$), которые бы удовлетворяли всем ограничениям одновременно.

Специфика робототехнических задач

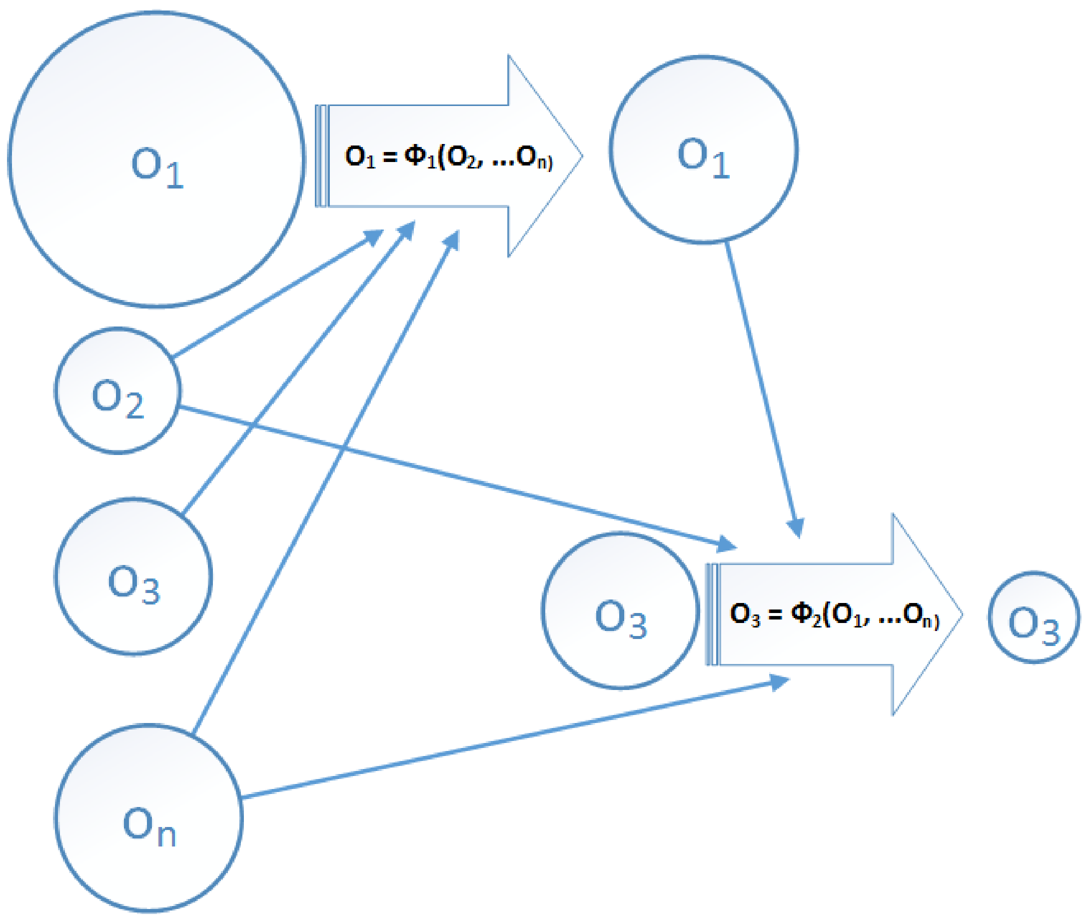
1. Ограниченность вычислительных ресурсов.
2. Необходимость наличия гарантированного решения (решения «на всякий случай»).
3. Баланс между временем вычислений и точностью.

Недоопределенные модели

А.С. Нариньяни, 80-е г.г.

1. Н-модели – технология решения задач удовлетворения ограничений в самой общей постановке.
2. Переменной сопоставляется *недоопределенное значение* (*Н-значение*) – промежуточное между полной определенностью (точное значение) и полной неопределенностью.
3. В процессе вычислений Н-значение может становиться только более точным, гарантируя тем самым *монотонность* вывода.

Процесс доуточнения

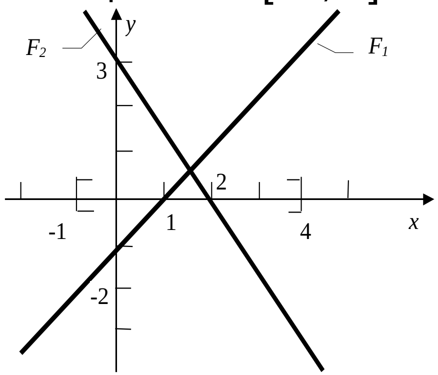


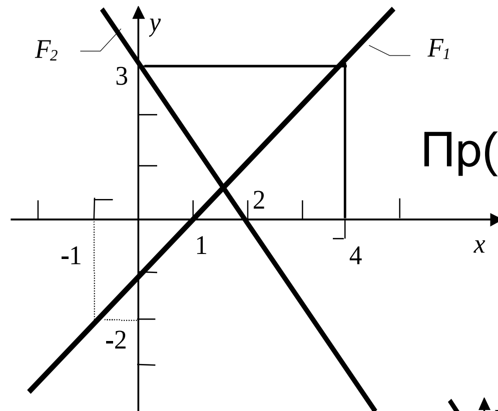
Пример

(F_1): $y = x - 1$

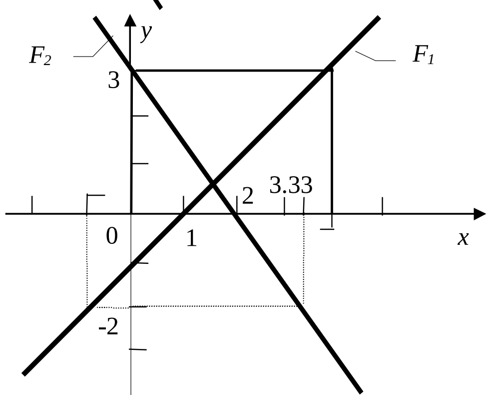
(F_2): $2 * y = 3 * (2 - x)$

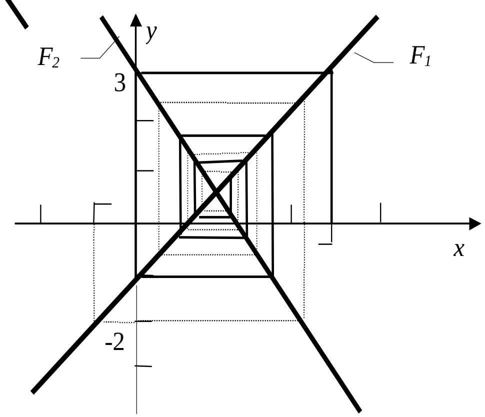
Оценка x: [–1, 4]





Пр(F_1 на *y* | *x*=[–1, 4]): y = [–2, 3]





Пр(F_2 на x): x = [0, 10/3]

Недоопределенная переменная

Примеры:

- классическая переменная (точное значение).
- Н-переменная. Недоопределенное значение:
  - возраст: “между 35 и 40 годами”.
  - расстояние: 1 до 10 км;
  - тип редуктора: волновой или планетарный.

Особенности Н-моделей

1. Способность решения т.н. *смешанных* задач (переменные и ограничения самой различной природы - численные, дискретные, множественные, таблицы и т.п.).
2. Каждой переменной ставится в соответствие ее *недоопределенное расширение* (*Н-расширение*)
   1. точные значения (простейший тип)
   2. перечисление (множество подмножеств)
   3. множества
   4. интервалы (интервальная алгебра) и мультиинтервалы

Примеры Н-расширений

- *Точное* значение (*X = X^{Single}):
  $X^{Single} = \{ \{x\} \mid x \in X \} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$.
- *Перечислимое* Н-расширение - множество всех подмножеств:
  $X^{Enum} = 2^X$.
- *Интервальное* Н-расширение:
  $X^{Interval} = \{ [x^{Lo}, x^{Up}] \mid x^{Lo}, x^{Up} \in X \}$.
- *Мультиинтервальное* Н-расширение:
  $X^{MultiInterval} = \{ x \mid x = \cup\, x_k,\ x_k \in X^{Interval},\ k = 1, 2, \ldots \}$.

Примеры Н-расширений

Пусть универсум переменной x – это множество целочисленных значений, а ее текущее значение равно множеству {3, -2, 7, 8, 9, 4}.

Н-расширение	**Н-значение**
Single	**(полная неопределенность)**
Enum	**{ 3, -2, 7, 8, 9, 4 }**
Interval	**[-2, 9]**
MultiInterval	**{ [-2, -2], [3, 4] , [7, 9] }**

Процесс вычислений Н-модели

1. Строится *обобщенная вычислительная модель*
   ***M* = (*V*, *W*, *C*, *R*),** где
   V – множество объектов из заданной предметной области,
   R – множество *ограничений* на значениях объектов из *V*,
   W – множество *функций присваивания*,
   C – множество *функций проверки корректности*.

Процесс вычислений Н-модели

2. Каждому объекту $v \in V$ сопоставляются:

- универсум X_v и начальное значение из универсума;
- функция присваивания W_v, определяющая новое значение объекта как функцию от текущего и присваиваемого значений;
- функция проверки корректности C_v

Процесс вычислений Н-модели

3. Ограничения из *R* должны быть функционально интерпретируемыми.
   Отношение $r(x_1,\ldots,x_n)$ представляется набором функций *интерпретации* f_i

$$\mathbf{x_i = f_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\ ),\ \mathit{i}=1,\ \ldots,\ \mathit{n}.}$$

Такие функционально интерпретируемые отношения называются *ограничениями*.

Пример:

Отношение ***r**:* $x + y = z$

Функции интерпретации:

f_i: $z = x + y$;

$x = z - y$;

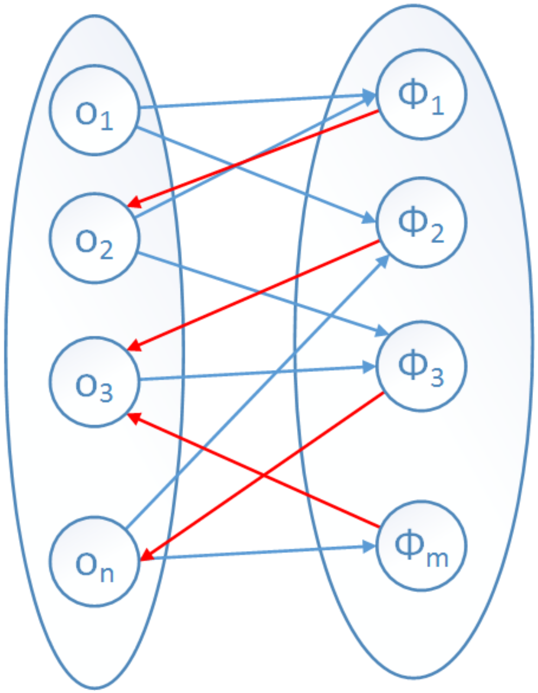
$y = z - x$

Процесс вычислений Н-модели

4. Строится двудольный орграф.
   2 типа вершин: объекты О и функции Ф.

- входящие в Ф дуги соотносят с ней объекты – входные аргументы для функции;
- исходящие указывают на объекты, в которые должна производиться запись вырабатываемых функцией результатов.

Каждой О-вершине сопоставляются тип и значение, а также связываются функции присваивания и проверки корректности.



----

5. Потоковый характер процесса вычислений: изменение О-вершин активирует Ф-вершины, для которых эти объектные вершины являются входными аргументами, а исполнение Ф-вершин может вызывать изменение результирующих О-вершин.

Интервальные операции

- Н-расширение унарного минуса:
  $*-: \ [a^{Lo}, a^{Up}] = [-a^{Up}, -a^{Lo}]$;
- Н-расширение сложения ($a=b*+c$):
  $*+: \ [a^{Lo}, a^{Up}] = [b^{Lo} + c^{Lo}, b^{Up} + c^{Up}]$;

Пример

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 12;} \\ \boldsymbol{2 * x = y;} \end{cases} \qquad 0 \le x \le 100;\ 0 \le y \le 100.$$

Множество функций интерпретации:

f_1: $y \leftarrow 12 - x$; $\qquad f_2$: $x \leftarrow 12 - y$;

f_3: $y \leftarrow 2 * x$; $\qquad f_4$: $x \leftarrow y / 2$;

f_1: $[y^{Lo}, y^{Up}] \leftarrow [12 - x^{Up}, 12 - x^{Lo}]$;

f_2: $[x^{Lo}, x^{Up}] \leftarrow [12 - y^{Up}, 12 - y^{Lo}]$;

f_3: $[y^{Lo}, y^{Up}] \leftarrow [\min\{2*x^{Lo}, 2*x^{Up}\}, \max\{2*x^{Lo}, 2*x^{Up}\}]$;

f_4: $[x^{Lo}, x^{Up}] \leftarrow [\min\{x^{Lo}/2, x^{Up}/2\}, \max\{x^{Lo}/2, x^{Up}/2\}]$

Протокол исполнения Н-модели

N	Активные функции	Н-значения текущее | новое	Флаг	Добавить функции
1	$f_1 \mid f_2 - f_4$	y=[0,100] | [0,12]	да	f_2, f_4
2	$f_2 \mid f_3, f_4$	x=[0,100] | [0,12]	да	f_1, f_3
3	$f_3 \mid f_4, f_1$	y=[0,12] | [0,12]	нет	
4	$f_4 \mid f_1$	x=[0,12] | [0,6]	да	f_1, f_3
5	$f_1 \mid f_3$	y=[0,12] | [6,12]	да	f_2, f_4
6	$f_3 \mid f_2, f_4$	y=[6,12] | [6,12]	нет	
7	$f_2 \mid f_4$	x=[0,6] | [0,6]	нет	
8	$f_4 \mid$	x=[0,6] | [3,6]	да	f_1, f_3
9	$f_1 \mid f_3$	y=[6,12] | [6,9]	да	f_2, f_4
10	$f_3 \mid f_2, f_4$	y=[6,9] | [6,9]	нет	
11	$f_2 \mid f_4$	x=[3,6] | [3,6]	нет	
12	$f_4 \mid$	x=[3,6] | [3,4]	да	f_1, f_3
13	$f_1 \mid f_3$	y=[6,9] | [8,9]	да	f_2, f_4
14	$f_3 \mid f_2, f_4$	y=[8,9] | [8,8]	да	f_2, f_4
15	$f_2 \mid f_4$	x=[3,4] | [4,4]	да	f_1, f_3
16	$f_4 \mid f_1, f_3$	x=[4,4] | [4,4]	нет	
17	$f_1 \mid f_3$	y=[8,8] | [8,8]	нет	
18	$f_3 \mid$	y=[8,8] | [8,8]	нет	

Пример. 2 задачи робототехники

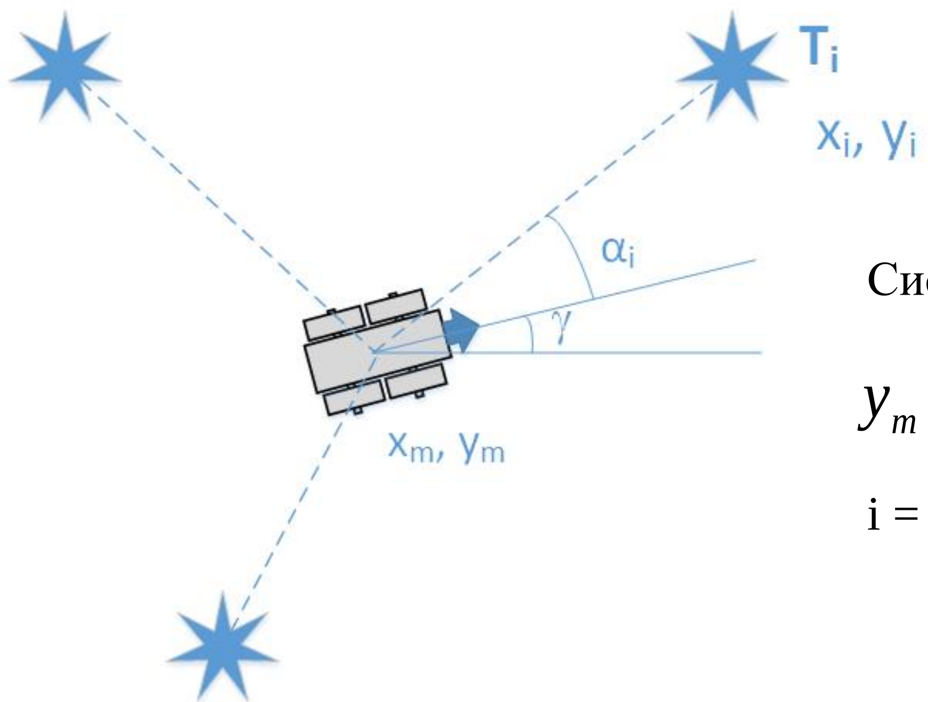
1. Вычисление положения робота в детерминированном поле маяков.
2. Обратная задача кинематики многозвенного манипулятора.

Задача определения положения робота

Дано:

1. Три маяка с заданными декартовыми координатами $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2)$, $T_3(x_3,y_3)$
2. Углы видимости маяков α_1, α_2, α_3.

Необходимо определить координаты робота (x_m, y_m) и его ориентацию γ.

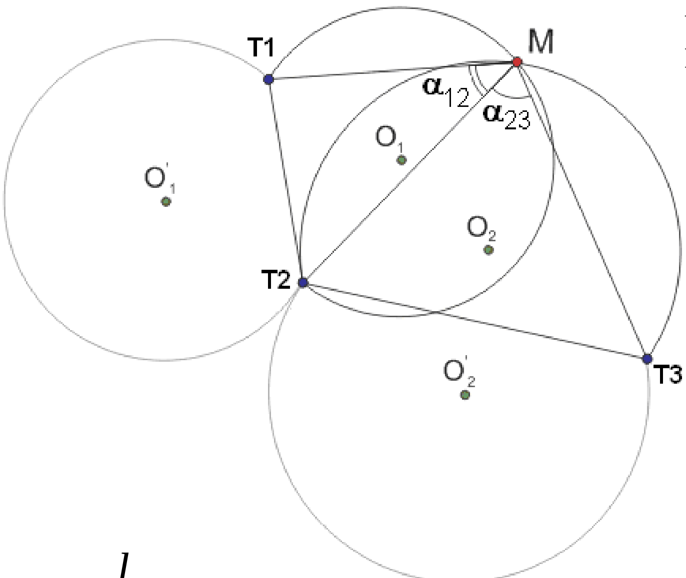


Система уравнений:

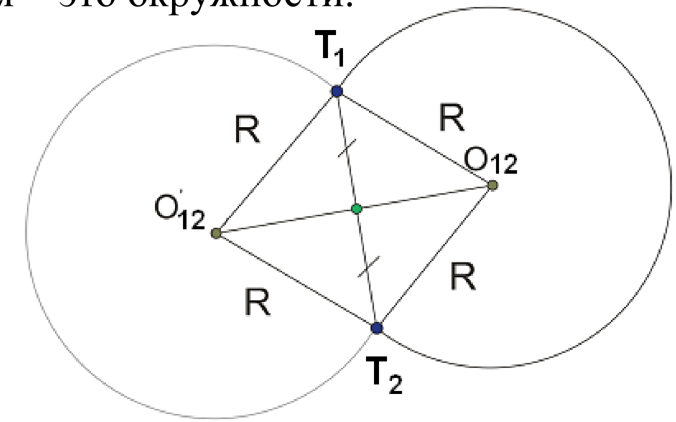
$$y_m = tg(\alpha_i + \gamma \pm \Delta_i)(x_m - x_i) + y_i$$

i = 1,2,3

Метод окружностей



Геометрические места, откуда пары маяков видны под одним углом – это окружности.



$$2R = \frac{l_{1,2}}{\sin \alpha_{12}}$$

$$l_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Нахождение центров окружностей O_1 и O'_1

$$Oy_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} + (x_2 - x_1)\left|\frac{\cos\alpha_{12}}{2\sin\alpha_{12}}\right|$$

$$Ox_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} + (y_2 - y_1)\left|\frac{\cos\alpha_{12}}{2\sin\alpha_{12}}\right|$$

Искомая точка $M(x_m, y_m)$

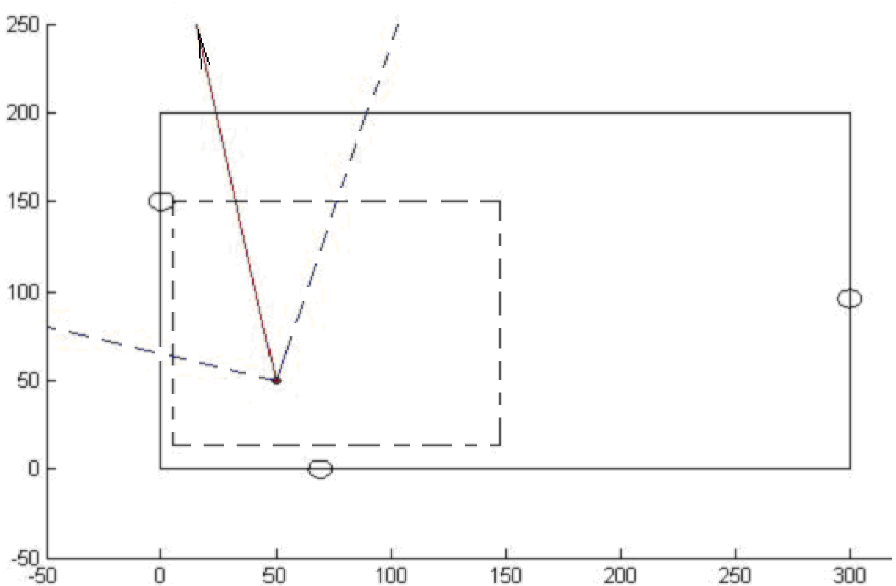
$$\begin{cases} (x_m - x_{12}^o)^2 + (y_m - y_{12}^o)^2 = R_{12}^2 \\ (x_m - x_{23}^o)^2 + (y_m - y_{23}^o)^2 = R_{23}^2 \\ (x_m - x_{31}^o)^2 + (y_m - y_{31}^o)^2 = R_{31}^2 \end{cases}$$

Угол ориентации

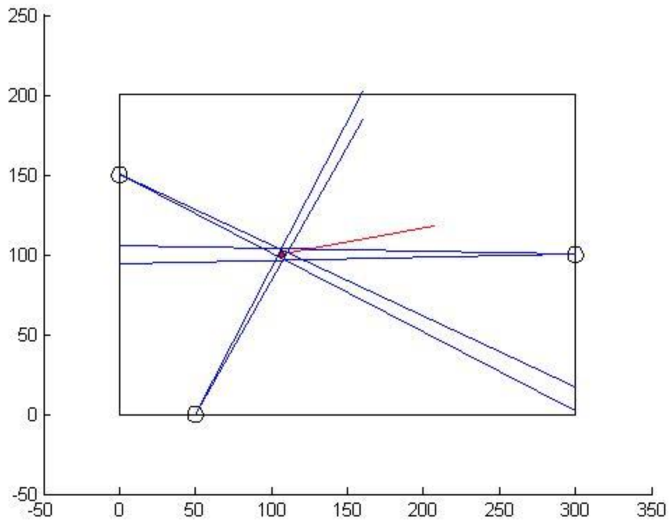
$$\gamma = \operatorname{arctan}\left(\frac{y_1 - y_m}{x_1 - x_m}\right) - \alpha_1$$

Особенности метода окружностей

- малая точность (накопление ошибок);
- ресурсоемкость.



Н-вычисления



Вернемся к исходной системе уравнений:

$$y_m = \tan(\alpha_i + \gamma \pm \Delta_i)(x_m - x_i) + y_i$$

i = 1,2,3

Ограничения:

$$x_m^\nu = \left[\min\left(x_i + \frac{y_m^\nu - y_i}{\tan(\alpha_i \pm \Delta_i + \gamma_m^\nu)}\right); \max\left(x_i + \frac{y_m^\nu - y_i}{\tan(\alpha_i \pm \Delta_i + \gamma_m^\nu)}\right)\right]$$

$$y_m^\nu = \left[\min(y_i + (x_m^\nu - x_i)\tan(\alpha_i \pm \Delta_i + \gamma_m^\nu)); \max(y_i + (x_m^\nu - x_i)\tan(\alpha_i \pm \Delta_i + \gamma_m^\nu))\right]$$

$$\gamma_m^\nu = \left[\min\left(\arctan\frac{y_m^\nu - y_i}{x_m^\nu - x_i} - (\alpha_i \pm \Delta_i)\right); \max\left(\arctan\frac{y_m^\nu - y_i}{x_m^\nu - x_i} - (\alpha_i \pm \Delta_i)\right)\right]$$

$$x_m^\nu = [x_m^{lo}; x_m^{up}],\ y_m^\nu = [y_m^{lo}; y_m^{up}],\ \gamma_m^\nu = [\gamma_m^{lo}; \gamma_m^{up}]$$

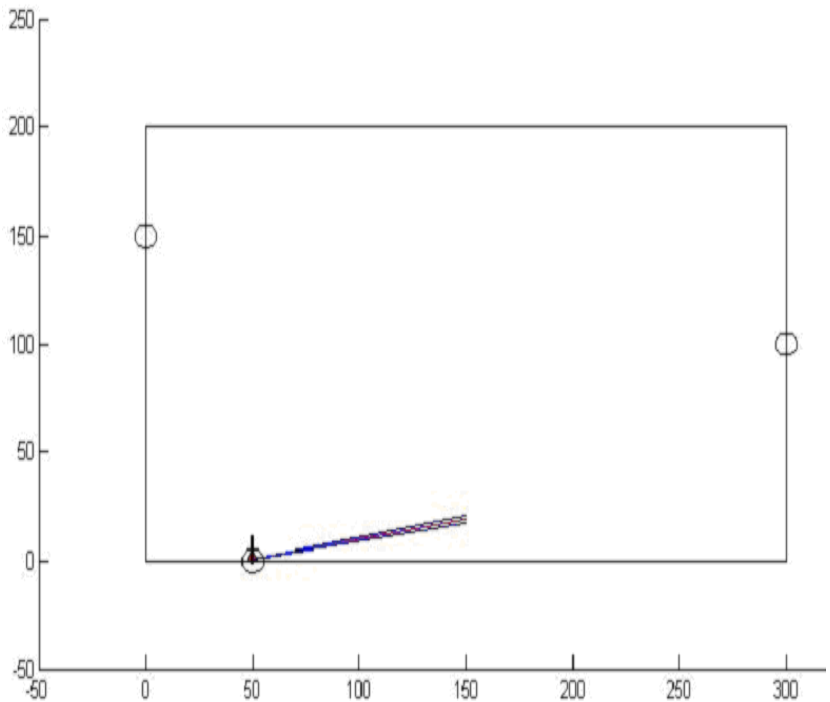
Особенности вычислений

$x_m=[0, L_x]$, $y_m=[0, L_y]$, $\gamma=[0, 360°]$,

где L_x, L_y - размеры полигона

Начальная оценка угла ориентации γ^* методом окружностей

$$[\gamma^* - \max\{\Delta_i\}, \gamma^* + \max\{\Delta_i\}]$$

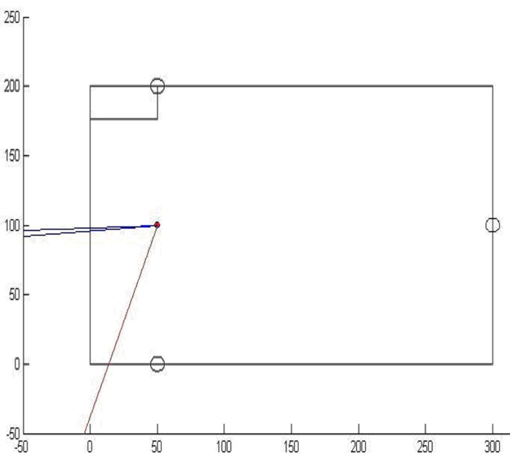


Неприятности и некорректности

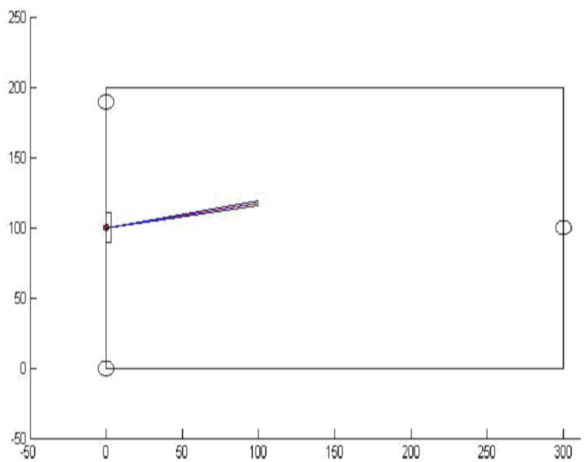
а) совпадение абсцисс робота и маяков,

б) совпадение абсцисс координат маяков, но с приемлемыми результатами,

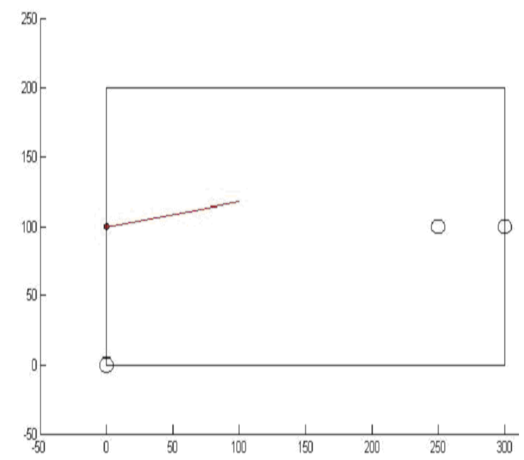
в) робот и два маяка на одной линии



а)



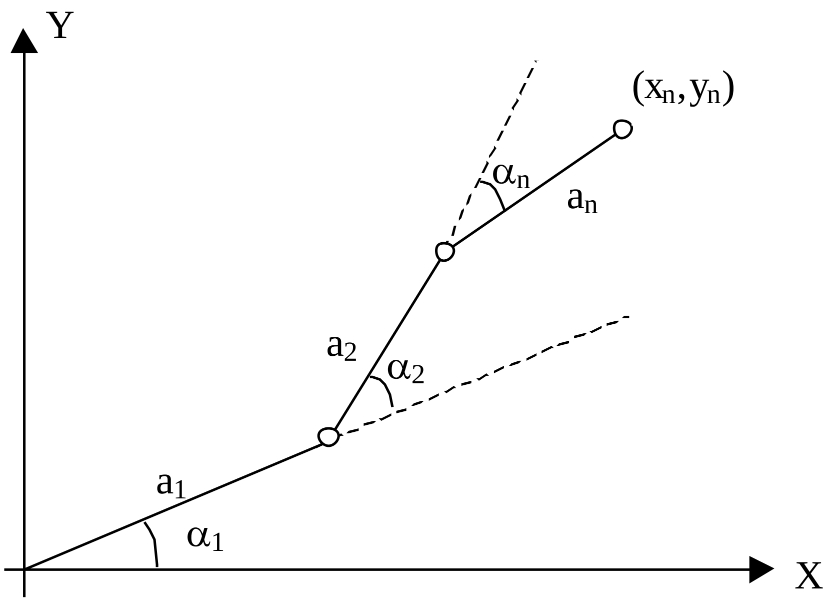
б)



в)

Обратная задача кинематики многозвенного манипулятора

n-звенный манипулятор. Известны длины звеньев a_1, a_2, …a_n.



Требуется определить углы поворота звеньев α_1, α_2, … α_n для того, чтобы позиционировать конец последнего звена (схват) в заданную точку (x_n, y_n)

Решение

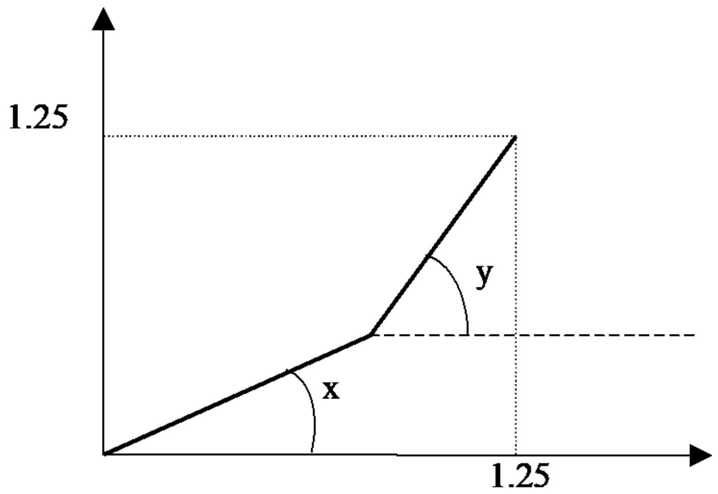
Координаты i–го звена:

$$\begin{cases} x_i = a_i \cos(\alpha_i + \alpha_{i-1}) + x_{i-1} \\ y_i = a_i \sin(\alpha_i + \alpha_{i-1}) + y_{i-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \cos(\alpha_j) \\ y_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \sin(\alpha_j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sum_i a_i \cos(\alpha_i) \\ Y = \sum_i a_i \sin(\alpha_i) \end{cases}$$

Частный случай



- $M(1.25,\ 1.25)$
- $a_i=1$

Ограничения

$$\begin{cases} \cos(x)+\cos(y)=1.25 \\ \sin(x)+\sin(y)=1.25 \end{cases}$$

Функции интерпретации

$$\begin{cases} x=\arccos(1.25-\cos(y)) \\ y=\arccos(1.25-\cos(x)) \\ x=\arcsin(1.25-\sin(y)) \\ y=\arcsin(1.25-\sin(x)) \end{cases}$$

x = {[0;0.4][0.7;2]}

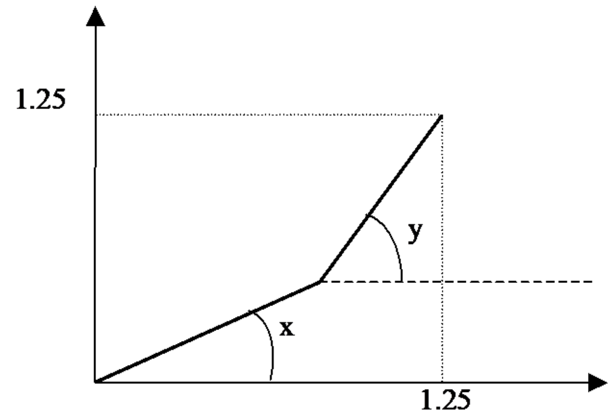
y = {[0;0.4][0.7;2]}

Результаты

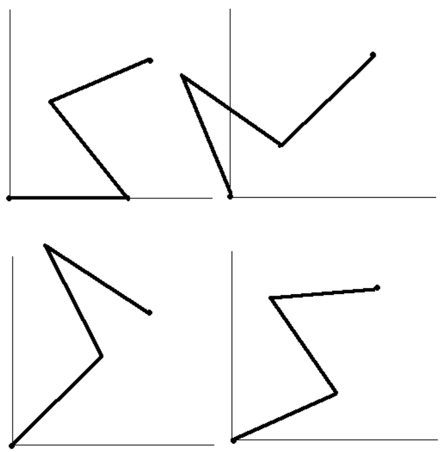
Результаты: мультиинтервалы (8 шаг итерации, точность $\delta = 10^{-6}$):

x = {[1.27209, 1.27209] [1.27209, 1.27209] [0.298703, 0.298703]}

y = {[0.298703, 0.298703] [0.298703, 0.298703] [1.27209, 1.27209]}



Неоднозначность решения



x=2sin(x) (3 решения)

1) x = [-10; 10]:

Результат: [-2; 2].

2) x={[-3;-1.7] [-0.5;0.5] [1.7;3]})

Результат: $x = [0, 4\cdot10^{-16}]$ [1.89549, 1.89549]